20. Интеграл с променлива горна граница. Формула на Лайбниц - Нютон

20.1. Интеграл с променлива горна граница.

Нека функцията $f(x)$ е интегруема в интервала $[a, b]$. Тогава $f(x)$ е интегруема и във всеки подинтервал $[a, t]$ за всяко $t \in [a, b]$, т.е. съществува

$$\int_a^t f(x)\,dx \text{ за всяко } t \in [a, b].$$

Този интеграл се нарича **интеграл с променлива горна граница** и чрез него можем да дефинираме функция

$$F(t) = \int_a^t f(x)\,dx \text{ за всяко } t \in [a, b]. \tag{1}$$

Теорема 1. *Ако функцията $f(x)$ е интегруема в интервала $[a, b]$, то функцията $F(t)$, дефинирана в $[a, b]$ чрез (1), е непрекъсната в този интервал.*

Доказателство. Тъй като функцията $f(x)$ е интегруема в интервала $[a, b]$, то тя е ограничена в този интервал, т.е. съществува $c > 0$ такова, че $|f(x)| \leq c$ за всяко $x \in [a, b]$.

Да фиксираме произволно $t_0 \in [a, b]$. Тогава

$$F(t_0 + \Delta t) - F(t_0) = \int_a^{t_0+\Delta t} f(x)\,dx - \int_a^{t_0} f(x)\,dx =$$

$$= \int_a^{t_0} f(x)\,dx + \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} f(x)\,dx - \int_a^{t_0} f(x)\,dx = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} f(x)\,dx.$$

Следователно

$$|F(t_0 + \Delta t) - F(t_0)| = \left| \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} f(x)\,dx \right| \leq \left| \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} |f(x)|\,dx \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} c\,dx \right| = c \left| \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} dx \right| = c\,|\Delta t|\,.$$

От тези неравенства веднага се получава, че $\lim\limits_{\Delta t \to 0} F(t_0 + \Delta t) = F(t_0)$, т.е. функцията $F(t)$ е непрекъсната в точката t_0 и тъй като тази точка беше произволно избрана, $F(t)$ е непрекъсната в целия интервал $[a, b]$. □

Показахме, че функцията $F(t)$ е непрекъсната в интервала $[a, b]$. Естествено възниква и въпросът при какви предположения за $f(x)$ функцията $F(t)$ ще бъде диференцируема. Отговор дава следната

Теорема 2 (Лайбниц-Нютон). *Нека функцията $f(x)$ е непрекъсната в интервала $[a, b]$. Тогава функцията $F(t)$, дефинирана в $[a, b]$ чрез (1), е диференцируема в този интервал и е изпълнено равенството $F'(t) = f(t)$ за всяко $t \in [a, b]$.*

Доказателство. Нека да фиксираме произволно $t_0 \in [a, b]$ и нарастването Δt е такова, че $t_0 + \Delta t \in [a, b]$. Образуваме диференчното частно

$$\frac{F(t_0 + \Delta t) - F(t_0)}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}\left(\int_a^{t_0+\Delta t} f(x)\,dx - \int_a^{t_0} f(x)\,dx\right) = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} f(x)\,dx.$$

Тогава

$$\left|\frac{F(t_0 + \Delta t) - F(t_0)}{\Delta t} - f(t_0)\right| = \left|\frac{1}{\Delta t}\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} f(x)\,dx - \frac{f(t_0)}{\Delta t}\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} dx\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{\Delta t}\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} [f(x) - f(t_0)]\,dx\right| \le \frac{1}{|\Delta t|}\left|\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} |f(x) - f(t_0)|\,dx\right|.$$

Да фиксираме произволно $\varepsilon > 0$. Тъй като функцията $f(x)$ е непрекъсната в точката t_0, то съществува $\delta > 0$ такова, че за всяко $x \in [a, b]$, за което $|x - t_0| < \delta$ е изпълнено $|f(x) - f(t_0)| < \varepsilon$.

Нека Δt е такова, че $|\Delta t| < \delta$. Тогава за всички стойности на x, принадлежащи на интервала с краища t_0 и $t_0 + \Delta t$, ще имаме $|x - t_0| \le |\Delta t| < \delta$, и, следователно $|f(x) - f(t_0)| < \varepsilon$.

Така получаваме

$$\left|\frac{F(t_0 + \Delta t) - F(t_0)}{\Delta t} - f(t_0)\right| \le \frac{1}{|\Delta t|}\left|\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} |f(x) - f(t_0)|\,dx\right| \le \frac{\varepsilon}{|\Delta t|}\left|\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} dx\right| = \varepsilon.$$

Това по определението за граница на функция означава, че

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{F(t_0 + \Delta t) - F(t_0)}{\Delta t} = f(t_0), \text{ т.е. } F'(t_0) = f(t_0).$$

□

20.2. Формула на Лайбниц-Нютон.

От теоремата на Лайбниц-Нютон става ясно как неопределеният интеграл от една непрекъсната функция (т.е. нейните примитивни), могат да се изразят чрез определен интеграл от същата функция. Следващото твърдение показва обратното - как може да бъде пресметнат определеният интеграл от функцията ако е известна някоя нейна примитивна.

Теорема 3 (Формула на Лайбниц-Нютон). *Нека функцията $f(t)$ е непрекъсната в интервала $[a, b]$ и $\Phi(t)$ е произволна нейна примитивна в същия интервал. Тогава е изпълнена формулата*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Доказателство. Нека $F(t)$ е примитивната на $f(t)$, дефинирана чрез (1). Очевидно е изпълнено равенството $F(a) = 0$. Както знаем, разликата между всеки две примитивни на дадена функция е константа, и следователно съществува $C \in \mathbb{R}$ такова, че

$$F(t) = \Phi(t) + C \text{ за всяко } t \in [a, b].$$

При $t = a$ получаваме

$$0 = F(a) = \Phi(a) + C, \text{ т.е. } C = -\Phi(a).$$

Оттук имаме

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) = \Phi(b) + C = \Phi(b) - \Phi(a).$$

$\square$

Забележка. За удобство е прието да се използва означението

$$\Phi(x)\Big|_a^b = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Така формулата на Лайбниц-Нютон може да се запише във вида

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \Phi(x)\Big|_a^b .$$