19. Класове интегруеми функции. Свойства на определения интеграл

19.1. Класове интегруеми функции.

Първо ще споменем две твърдения, което ще използваме в доказателствата.

Теорема 1 (Кантор). *Ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в крайния затворен интервал $[a, b]$, то тя е равномерно непрекъсната в него, т.е. за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$ такова, че за всеки $x', x'' \in [a, b]$, за които $|x' - x''| < \delta$ е изпълнено $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.*

Теорема 2 (Теорема за осцилациите). *Ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в крайния затворен интервал $[a, b]$, то за всяко $\varepsilon > 0$ интервалът $[a, b]$ може да се раздели на краен брой непресичащи се интервали Δ_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ такива, че осцилацията $\omega(f)$ във всеки един от тези интервали да бъде по-малка от ε.*

Теорема 3. *Всяка функция, непрекъсната в интервала $[a, b]$, е интегруема в него.*

Доказателство. Да фиксираме произволно $\varepsilon > 0$. Ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в интервала $[a, b]$, теоремата на Кантор и теоремата за осцилациите следва, че съществува $\delta > 0$ такова, че във всеки подинтервал на $[a, b]$ с дължина по-малка от δ осцилацията на $f(x)$ да бъде по-малка от $\dfrac{\varepsilon}{b-a}$. Сега за всяко разбиване $\tau : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ с $\sigma(\tau) < \delta$ ще имаме, че за осцилацията във всеки интервал $[x_{i-1}, x_i]$ е изпълнено $\omega_i(f) < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$. Оттук

$$S_\tau - s_\tau = \sum_{i=1}^{n} \omega_i (x_i - x_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = \varepsilon.$$

Сега твърдението следва директно от критерия на Дарбу. □

Теорема 4. *Всяка ограничена функция, непрекъсната в интервала $[a, b]$, с изключение на краен брой точки, е интегруема в него.*

Доказателство. Нека $y_1, y_2, \ldots, y_k$ са точките на прекъсване на $f(x)$ в интервала $[a, b]$, и ε е произволно положително число. Да означим в W обединението на интервалите

$$W = (y_1 - \varepsilon, y_1 + \varepsilon) \cup (y_2 - \varepsilon, y_2 + \varepsilon) \cup \ldots \cup (y_k - \varepsilon, y_k + \varepsilon).$$

Можем да считаме, че ε е толкова малко, че интервалите в обединението не се пресичат помежду си и се съдържат в интервала (a, b). Тогава множеството $[a, b] \setminus W$ представлява обединение на краен брой затворени интервали:

$$[a, b] \setminus W = [a, y_1 - \varepsilon] \cup [y_1 + \varepsilon, y_2 - \varepsilon] \cup \ldots \cup [y_{k-1} + \varepsilon, y_k - \varepsilon] \cup [y_k + \varepsilon, b].$$

Във всеки един от тези интервали функцията $f(x)$ е непрекъсната. От теоремата за осцилациите следва, че можем да разделим всеки един от интервалите в множеството $[a,b] \setminus W$ на краен брой подинтервали така, че осцилацията ω_i на $f(x)$ във всеки един от тях да е по-малка от ε. Ако добавим към тези интервали и интервалите от множеството W (след като ги затворим), получаваме разбиване на интервала $[a,b]$, което ще означим с τ, а делящите му точки - с $a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b$. Имаме:

$$S_\tau - s_\tau = \sum_{i=1}^{n} \omega_i (x_i - x_{i-1}) = \sum{}' \omega_i (x_i - x_{i-1}) + \sum{}'' \omega_i (x_i - x_{i-1}),$$

където сумирането в $\sum{}'$ се извършва по интервалите от W, а това в $\sum{}''$ - по интервалите от $[a,b] \setminus W$.

Тъй като $f(x)$ е ограничена функция, то съществуват константи m и M такива, че $m \leq f(x) \leq M$ за всяко $x \in [a,b]$. Тогава

$$\sum{}' \omega_i (x_i - x_{i-1}) \leq (M - m) \sum{}' (x_i - x_{i-1}) \leq (M - m) 2k\varepsilon.$$

Втората сума се оценява по следния начин:

$$\sum{}'' \omega_i (x_i - x_{i-1}) \leq \varepsilon \sum{}'' (x_i - x_{i-1}) \leq \varepsilon (b - a).$$

Така получихме, че

$$S_\tau - s_\tau \leq (2k(M - m) + (b - a))\varepsilon.$$

Тъй като множителят пред ε е константа (която не зависи от ε), то разликата $S_\tau - s_\tau$ може да бъде направена произволно малка. Тогава от критерия на Дарбу следва интегруемостта на $f(x)$ в интервала $[a,b]$. □

Теорема 5. *Всяка монотонна в интервала $[a,b]$ функция е интегруема в него.*

Доказателство. Да предположим, че $f(x)$ е например монотонно растяща. Нека ε е произволно положително число и $\delta = \dfrac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$.

Нека τ е произволно разбиване с диаметър, по-малък от δ. Тогава очевидно $M_i = f(x_i)$, $m_i = f(x_{i-1})$ и

$$S_\tau - s_\tau = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \leq$$

$$\leq \delta \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1})) = \delta (f(b) - f(a)) = \varepsilon,$$

което доказва твърдението. □

19.2. Свойства на определения интеграл.

Ще докажем някои основни свойства на определения интеграл.

Свойство 1 (Линейност). *Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ са интегруеми в интервала $[a,b]$ и $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогава функциите $f(x) + g(x)$ и $\lambda f(x)$ са също интегруеми в*

$[a,b]$ и са изпълнени равенствата

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx,$$

$$\int_a^b (\lambda f(x))\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx.$$

Доказателство. Нека да означим

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx, \quad I(g) = \int_a^b g(x)\,dx$$

и да изберем произволно $\varepsilon > 0$. Тогава от определението за Риман за определен изтеграл следва, че съществува $\delta > 0$ такова, че ако τ е разбиване на интервала $[a,b]$, за което $\sigma(\tau) < \delta$ са изпълнени неравенствата

$$\left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - I(f)\right| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ и } \left|\sum_{i=1}^n g(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - I(g)\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следователно

$$\left|\sum_{i=1}^n (f(\xi_i)+g(\xi_i))(x_i - x_{i-1}) - (I(f)+I(g))\right| \le$$

$$\le \left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - I(f)\right| + \left|\sum_{i=1}^n g(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - I(g)\right| < \varepsilon.$$

С това първото равенство е доказано. Второто равенство се доказва по подобен начин. □

Свойство 2 (Позитивност). *Ако функцията $f(x)$ е интегруема и неотрицателна в интервала $[a,b]$, то*

$$\int_a^b f(x)\,dx \ge 0.$$

Доказателство. От условието е ясно, че за всяко разбиване τ на интервала $[a,b]$ и за всеки избор на междинни точки ще бъде изпълнено неравенството

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \ge 0.$$

Оттук твърдението се получава при граничен преход при $\sigma(\tau) \to 0$. □

Следствие 1 (Интегриране на неравенства). *Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ са интегруеми в интервала $[a,b]$ и $f(x) \le g(x)$ за всяко $x \in [a,b]$. Тогава*

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx.$$

Доказателство. Твърдението следва от предходното свойство, приложено за функцията $g(x) - f(x)$. □

Свойство 3. *Ако функцията $f(x)$ е интегруема в интервала $[a, b]$, то $|f(x)|$ е също интегруема в $[a, b]$ и са изпълнени неравенствата*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Доказателство. Нека τ е произволно разбиване на интервала $[a, b]$ с делящи точки $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Да означим с ω_i осцилацията на $f(x)$ в интервала $[x_{i-1}, x_i]$, а с $\overline{\omega_i}$ - осцилацията на $|f(x)|$ в този интервал. Нека S_τ, s_τ са голямата и малката сума на Дарбу за $f(x)$, а $\overline{S_\tau}$, $\overline{s_\tau}$ - голямата и малката сума за $|f(x)|$. От неравенството

$$||f(x)| - |g(y)|| \le |f(x) - g(y)|$$

веднага следва, че $\overline{\omega_i} \le \omega_i$ и следователно

$$\overline{S_\tau} - \overline{s_\tau} \le S_\tau - s_\tau.$$

Тъй като по условие дясната страна може да бъде направена произволно малка, то това е вярно и за лявата страна на неравенството и следователно $|f(x)|$ е интегруема.

Неравенството

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

се получава след интегриране на неравенствата

$$f(x) \le |f(x)| \text{ и } -f(x) \le |f(x)|.$$

□

Свойство 4 (Адитивност). *Нека $c \in (a, b)$. Тогава функцията $f(x)$ е интегруема в интервала $[a, b]$ тогава и само тогава, когато $f(x)$ е интегруема във всеки от интервалите $[a, c]$ и $[c, b]$. При това*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

винаги, когато трите интеграла съществуват.

Доказателство. 1) Нека функцията $f(x)$ е интегуема в интервала $[a, b]$. Да фиксираме разбиране τ такова, че $S_\tau - s_\tau < \varepsilon$. Нека означим с τ_1 разбиването, получено след прибавяне на точката c към делящите точки на τ. Тогава от свойствата на сумите на Дарбу получаваме, че $S_{\tau_1} - s_{\tau_1} < \varepsilon$. Да означим с $x_0, x_1, \ldots, x_n$ делящите точки на τ_1, като $x_k = c$. Имаме, че

$$S_{\tau_1} - s_{\tau_1} = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=k+1}^{n}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Тъй като събираемите отдясно са неотрицателни, то всяка една от двете суми е по-малка от ε, което означава, че $f(x)$ е интегруема в интервалите $[a, c]$ и $[c, b]$.

2) Нека $f(x)$ е интегруема в интервалите $[a, c]$ и $[c, b]$. Да фиксираме произволно $\varepsilon > 0$ и нека τ_1, τ_2 са такива разбивания съответно на интервала $[a, c]$ и интервала $[c, b]$, за които

$$S_{\tau_1} - s_{\tau_1} < \frac{\varepsilon}{2} \text{ и } S_{\tau_2} - s_{\tau_2} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Да означим с τ разбиването на интервала $[a, b]$, получено от делящите точки на τ_1 и τ_2. Тогава

$$S_\tau - s_\tau = (S_{\tau_1} + S_{\tau_2}) - (s_{\tau_1} + s_{\tau_2}) = (S_{\tau_1} - s_{\tau_1}) + (S_{\tau_2} - s_{\tau_2}) < \varepsilon,$$

т.е. според критерия на Дарбу $f(x)$ е интегруема в интервала $[a, b]$.

3) Остава да докажем равенството в условието. Нека трите интеграла в него съществуват и нека τ е произволно разбиване на интервала $[a, b]$, като точката c е една от делящите му точки $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Нека $c = x_k$. Тогава за римановите суми имаме

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=k+1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Двете събираеми в дясната страна представляват риманови суми за $f(x)$ съответно в интервалите $[a, c]$ и $[c, b]$. Като направим граничен преход при $\sigma(\tau) \to 0$, получаваме исканото равенство. $\square$

Досега разглеждахме определени интеграли, за които долната граница е по-малка от горната. Възможно е да се освободим от това ограничение. Нека $a > b$. Полагаме

$$\int_a^b f(x)\,dx \overset{def}{=} -\int_b^a f(x)\,dx.$$

При $a = b$ ще считаме, че $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = 0$.

Свойство 5 (Обобщена адитивност). *Равенството*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

е изпълнено при произволно разположение на a, b *и* c.

Доказателство. Нека например $a < b < c$. Тогава

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

.

Аналогично се доказва и случая $c < a < b$. $\square$