15. Неопределен интеграл - определение и свойства. Таблица на основните интеграли

Редица въпроси в математиката и нейните приложения водят до следната задача: *Дадена е функция $f(x)$, дефинирана в интервала (a,b). Да се намери функция $F(x)$, дефинирана и диференцируема в (a,b), която удовлетворява условието $F'(x) = f(x)$ за всяко $x \in (a,b)$.* Очевидно тази задача е обратна на задачата за намиране на производната на дадена функция.

15.1. Основни понятия и твърдения.

Определение 1. *Казваме, че $F(x)$ е **примитивна функция** на функцията $f(x)$ в интервала (a,b), ако дефиниционните области на $F(x)$ и $f(x)$ съдържат (a,b) и $F'(x) = f(x)$ за всяко $x \in (a,b)$.*

Да отбележим, че фиксирането на интервала (a,b) е съществено, тъй като е възможно в общия случай функциите $F(x)$ и $f(x)$ да не удовлетворяват изискването $F'(x) = f(x)$ за всяко $x \in (a,b)$. Например, ако $f(x) = \cos x$ и $F(x) = |\sin x|$, то $F'(x) = f(x)$ за $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, но за $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ имаме $F'(x) = (-\sin x)' = \cos x \neq f(x)$.

Ще припомним едно следствие от теоремата на Лагранж, което понякога се нарича основна теорема на интегралното смятане:

Теорема 1 (Основна теорема на интегралното смятане). *Нека функцията $f(x)$ е диференцируема в интервала (a,b). Функцията $f(x)$ е равна на константа в интервала (a,b) тогава и само тогава, когато $f'(x) = 0$ за всяко $x \in (a,b)$.*

Като използваме тази основна теорема лесно се доказва и следната

Теорема 2. *Нека $F(x)$ е примитивна функция на $f(x)$ в интервала (a,b). Тогава:*

1) за произволна константа C е изпълнено, че функцията $F(x) + C$ е също примитивна на $f(x)$ в (a,b).

2) ако $G(x)$ е примитивна функция на $f(x)$ в интервала (a,b), то съществува такава константа C, че $G(x) = F(x) + C$ за всяко $x \in (a,b)$.

Доказателство. 1) Очевидно е изпълнено, че $(F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$ за всяко $x \in (a,b)$.

2) Имаме $(G(x) - F(x))' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$ за всяко $x \in (a, b)$. От основната теорема на интегралното смятане сега следва, че съществува такава константа C, че $G(x) - F(x) = C$ за $x \in (a, b)$, т.е. $G(x) = F(x) + C$ за $x \in (a, b)$. □

Тази теорема всъщност означава, че всеки две произволни примитивни функции $F(x)$ и $G(x)$ в интервала (a, b) на дадена функция $f(x)$ се различават с константа. Тогава когато търсим всички примитивни функции на $f(x)$ в интервала (a, b) е достатъчно да намерим една примитивна функция $F(x)$. Всички останали се получават по формулата

$$G(x) = F(x) + C \text{ за } x \in (a, b)$$

когато C пробягва интервала $(-\infty, +\infty)$.

Определение 2. *Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в интервала (a, b). Съвкупността от всички примитивни функции на $f(x)$ в интервала (a, b) се нарича* ***неопределен интеграл*** *от функцията $f(x)$ и се означава с*

$$\int f(x)\,dx.$$

Ако $F(x)$ е една примитивна на $f(x)$ в интервала (a, b), записваме

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

където C е произволна константа.

15.2. Основни свойства на неопределения интеграл.

Нека всички разглеждани в тази точка функции са дефинирани в интервала (a, b).

Свойство 1. *Ако функцията $F(x)$ е диференцируема в интервала (a, b), то*

$$\int dF(x) = F(x) + C,$$

или, което е все същото,

$$\int F'(x)\,dx = F(x) + C.$$

Доказателство. Равенството $\int F'(x)\,dx = F(x) + C$ е изпълнено, тъй като очевидно $F(x)$ е примитивна функция на производната си $F'(x)$ в интервала (a, b). □

Свойство 2. $\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx.$

Доказателство. Нека $F(x)$ и $G(x)$ са примитивни функции съответно на $f(x)$ и $g(x)$ в интервала (a,b). Тогава имаме, че $F'(x) = f(x)$, $G'(x) = g(x)$ за $x \in (a,b)$ и

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C_1, \int g(x)\,dx = G(x) + C_2.$$

Следователно

$$\int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx = F(x) \pm G(x) + C_1 \pm C_2,$$

т.е. дясната страна на равенството е съвкупност от функции от вида $F(x) \pm G(x) + C_1 \pm C_2$, където C_1 и C_2 са произволни константи.

Ако означим $H(x) = F(x) \pm G(x)$, то функцията $H(x)$ е примитивна на $f(x) \pm g(x)$ в интервала (a,b), тъй като $H'(x) = F'(x) \pm G'(x) = f(x) \pm g(x)$ за $x \in (a,b)$. Получихме, че

$$\int (f(x) \pm g(x))\,dx = H(x) + C = F(x) \pm G(x) + C,$$

т.е. лявата страна на равенството е съвкупност от функции от вида $F(x) \pm G(x) + C$, където C е произволна константа.

Така показахме, че лявата и дясната страна на равенството са съвкупности от едни и същи функции, тъй като C, C_1 и C_2 са произволни константи. $\square$

Свойство 3. $\displaystyle\int (kf(x))\,dx = k\int f(x)\,dx, k \in \mathbb{R}.$

Доказателство. Нека $F(x)$ е примитивна функция на $f(x)$ в интервала (a,b). Тогава имаме, че $F'(x) = f(x)$ за $x \in (a,b)$ и

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C_1.$$

Следователно

$$k\int f(x)\,dx = kF(x) + kC_1,$$

т.е. дясната страна на равенството е съвкупност от функции от вида $kF(x) + kC_1$, където C_1 е произволна константа.

Ако означим $G(x) = kF(x)$, то функцията $G(x)$ е примитивна на $kf(x)$ в интервала (a,b), тъй като $G'(x) = (kF(x))' = kF'(x) = kf(x)$ за $x \in (a,b)$. Получихме, че

$$\int (kf(x))\,dx = G(x) + C_2 = kF(x) + C_2,$$

т.е. лявата страна на равенството е съвкупност от функции от вида $kF(x) + C_2$, където C_2 е произволна константа.

Така показахме, че лявата и дясната страна на равенството са съвкупности от едни и същи функции, тъй като C_1 и C_2 са произволни константи. $\square$

15.3. Таблица на основните интеграли.

Използвайки формулите за диференциране на основните елементарни функции можем да съставим следната таблица на основните интеграли:

1) $\displaystyle\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1;$

2) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C;$

3) $\displaystyle\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1;$

4) $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C;$

5) $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x + C;$

6) $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + C;$

7) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + C;$

8) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{cotg} x + C;$

9) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \left\{\begin{array}{r} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{array}\right. ;$

10) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \left\{\begin{array}{r} \operatorname{arctg} x + C \\ -\operatorname{arccotg} x + C \end{array}\right. ;$

11) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C, a \neq 0.$

Всяка една от тези формули се доказва, като се провери дали производната на дясната страна е равна на подинтеглалната функция в лявата страна.