11. Разкриване на неопределености. Теореми на Лопитал

При редица задачи за намиране на граница на функция се срещат трудности при пресмятане на граници от вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ или $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, при които общите правила за граничен преход не дават резултат. Оказва се, че за такива задачи може да бъде използван апаратът на диференциалното смятане.

Ще разгледаме т.нар. теореми на Лопитал, в които се твърди, че при определени условия границата на частното на две функции съвпада с границата на частното на техните производни.

Теорема 1 ($\left[\frac{0}{0}\right]$, $x \to a$)**.** *Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ имат непрекъснати производни в интервала (a, b) и $g'(x) \neq 0$ за всяко $x \in (a, b)$. Нека*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0.$$

Нека освен това съществува границата (крайна или безкрайна)

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Тогава

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доказателство. Можем да продължим по непрекъснатост функциите $f(x)$ и $g(x)$ в точката a, като положим $f(a) = 0$ и $g(a) = 0$ и запазим същите означения за продължените функции. Така определените функции са непрекъснати в интервала $[a, b)$ и са диференцируеми в (a, b).

Да изберем точка $x \in (a, b)$ и да приложим теоремата на Коши към затворения интервал $[a, x]$. Получаваме, че съществува точка $\xi \in (a, x)$ такава, че

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Нека $\{x_n\}_n$ е произволна редица от точки в интервала (a, b), клоняща към a, и нека $\{\xi_n\}_n$ е редицата от съответните точки, получени чрез теоремата на Коши по указания по-горе начин. Тъй като $\xi_n \in (a, x_n)$ за всяко $n \in \mathbb{N}$, то $\xi_n \to a$. Тогава имаме, че

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} \to \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

От определенито на Хайне следва, че границата на функцията $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ при $x \to a$ съществува и е равна на $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. $\square$

Теорема 2 ($\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, $x \to a$)**.** *Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ имат непрекъснати производни в интервала (a,b) и $g'(x) \neq 0$ за всяко $x \in (a,b)$. Нека*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = +\infty.$$

Нека освен това съществува границата (крайна или безкрайна)

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Тогава

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доказателство. Да отбележим, че от предположенията на теоремата следва, че $g'(x) < 0$ и следователно $g(x)$ е монотонно намаляваща. Ясно е също така, че $g(x) > 0$ за стойноси на x, достатъчно близки до a.

Ще разгледаме първо случая, когато $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R}$.

Фиксираме произволно $\varepsilon > 0$. Тогава съществува $x_0 \in (a,b)$ такова, че за всяко $x \in (a, x_0)$ е изпълнено

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - \ell \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Нека x е произволна точка в интервала (a, x_0). Ще приложим теоремата на Коши за интервала $[x, x_0]$. Получаваме

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \xi \in (x, x_0),$$

откъдето следва, че

$$\left| \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} - \ell \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Разглеждаме следните функции:

$$A(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}, B(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)}, C(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Имаме $B(x) = A(x)\left(1 - \dfrac{g(x_0)}{g(x)}\right)$. Тогава, тъй като $A(x)$ е ограничена в $(a, x_0]$, а $g(x) \to +\infty$, получаваме $B(x) - A(x) = -\dfrac{g(x_0)}{g(x)} A(x) \to 0$ при $x \to a$. Аналогично, $C(x) - B(x) = -\dfrac{f(x_0)}{g(x)} \to 0$.

Да изберем $\delta > 0$ такова, че $a + \delta < x_0$ и за всяко $x \in (a, a+\delta)$ да бъдат изпълнени неравенствата

$$|B(x) - A(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ и } |C(x) - B(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Тогава при $x \in (a, a+\delta)$ имаме

$$|C(x) - \ell| \leq |C(x) - B(x)| + |B(x) - A(x)| + |A(x) - \ell| < \varepsilon.$$

С това доказахме по определението на Коши, че $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \ell$.

Остава да разгледаме случая, когато $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = +\infty$. Тогава е ясно, че за стойности на x, достатъчно близки до a е изпълнено $f'(x) \neq 0$ и можем да разменим местата на $f(x)$ и $g(x)$. Тъй като $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{g'(x)}{f'(x)} = 0$, то според доказаното по-горе имаме $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 0$ и следователно $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$. $\square$

В двете теореми по-горе разгледахме случая, когато граничната точка a е в левия край на дефиниционния интервал, т.е. x клони към a отдясно. Разбира се, същите теореми са в сила и когато x клони към a отляво.

Теорема 3 ($\left[\frac{0}{0}\right]$, $x \to +\infty$)**.** *Нека функциите* $f(x)$ *и* $g(x)$ *имат непрекъснати производни в интервала* $(c, +\infty)$ *и* $g'(x) \neq 0$ *за всяко* $x \in (c, +\infty)$. *Нека*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} g(x) = 0.$$

Нека освен това съществува границата (крайна или безкрайна)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Тогава

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доказателство. Да дефинираме помощните функции $F(t)$ и $G(t)$ чрез формулите

$$F(t) = f\left(\frac{1}{t}\right), G(t) = g\left(\frac{1}{t}\right).$$

(т.е. правим смяна на променливата, определена с формулата $x = \frac{1}{t}$.) Без ограничение на общността можем да считаме, че $c > 0$. Тогава функциите $F(t)$ и $G(t)$ са дефинирани и диференцируеми в крайния интервал $(0, \frac{1}{c})$. Като имаме пред вид, че $t \to 0$ е равносилно на $x \to +\infty$, получаваме

$$\lim_{t \to 0} \frac{F'(t)}{G'(t)} = \lim_{t \to 0} \frac{\left(-\frac{1}{t^2}\right) f'\left(\frac{1}{t}\right)}{\left(-\frac{1}{t^2}\right) g'\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{t \to 0} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Тогава за функциите $F(t)$ и $G(t)$ в интервала $(0, \frac{1}{c})$ можем да приложим Теорема 1:

$$\lim_{t \to 0} \frac{F(t)}{G(t)} = \lim_{t \to 0} \frac{F'(t)}{G'(t)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

За да завършим доказателството е достатъчно да съобразим, че

$$\lim_{t \to 0} \frac{F(t)}{G(t)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

$\square$

Теорема 4 ($\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, $x \to +\infty$)**.** *Нека функциите* $f(x)$ *и* $g(x)$ *имат непрекъснати производни в интервала* $(c, +\infty)$ *и* $g'(x) \neq 0$ *за всяко* $x \in (c, +\infty)$. *Нека*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty.$$

Нека освен това съществува границата (крайна или безкрайна)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Тогава

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доказателството на тази теорема е аналогично на доказателството на Теорема 3, като вместо Теорема 1 се използва Теорема 2.

Разкриване на неопределености от други видове.

1) Граници от вида $[0.\infty]$. Ако например имаме $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=+\infty$, можем да преобразуваме неопределеността в $\left[\frac{0}{0}\right]$:

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{(g(x))^{-1}}$$

или в $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x)=\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{(f(x))^{-1}}.$$

2) Граници от вида $[\infty-\infty]$. Ако имаме $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=+\infty$, можем да преобразуваме неопределеността в $\left[\frac{0}{0}\right]$ например по следния начин:

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)-g(x)\right)=\lim_{x\to a}\left(\frac{1}{(f(x))^{-1}}-\frac{1}{(g(x))^{-1}}\right)=\lim_{x\to a}\frac{(g(x))^{-1}-(f(x))^{-1}}{(f(x))^{-1}.(g(x))^{-1}}.$$

3) Граници от вида $[1^\infty]$, $[0^0]$, $[\infty^0]$. Нека търсим границата на функцията $u(x)=[f(x)]^{g(x)}$, където границите на $f(x)$ и $g(x)$ образуват някоя от изброените три неопределености. Тогава чрез логаритмуване се получава

$$\ln u(x)=g(x).\ln f(x),$$

която е граница от вече разгледания вид $[0.\infty]$. Ако успеем да намерим границата на $\ln u(x)$, чрез граничен преход във формулата $u(x)=e^{\ln u(x)}$ ще намерим и търсената граница.