10. Основни теореми на диференциалното смятане: теореми на Рол, Лагранж и Коши

10.1. Локални екстремуми. Теорема на Ферма.

Определение 1. *Казваме, че функцията $f(x)$ има **локален максимум (локален минимум)** в точката $x_0 \in D_f$, ако същесвува такава околност $U(x_0)$ на точката x_0, $U(x_0) \subset D_f$, че за всяко $x \in U(x_0)$ да бъде изпълнено неравенството $f(x) \leq f(x_0)$ (съответно $f(x) \geq f(x_0)$). Функционалната стойност $f(x_0)$ се нарича локален максимум (локален минимум).*

*Локалните максимуми и локалните минимуми на функцията $f(x)$ общо се наричат **локални екстремуми** на $f(x)$.*

Теорема 1 (на Ферма). *Ако функцията $f(x)$ има в точката x_0 локален екстремум и е диференцируема в x_0, то $f'(x_0) = 0$.*

Доказателство. Първо да разгледаме случая, при който $f(x)$ има в точката x_0 локален максимум. Тогава съществува такава околност на x_0 от вида $(x_0 - \delta, x_0 + \delta), \delta > 0$, в която стойностите на $f(x)$ са по-малки или равни на $f(x_0)$. Тогава за $0 < h < \delta$ имаме

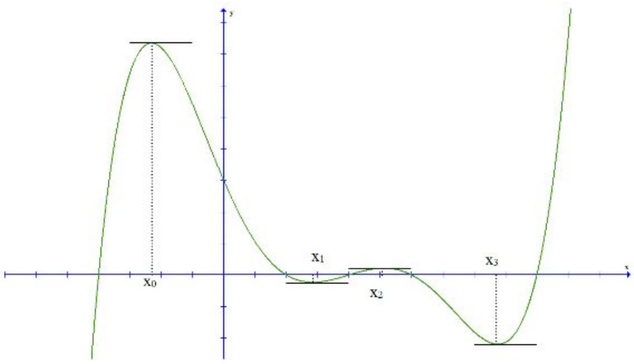
$$0 \geq \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \to f'(x_0) \text{ при } h \to 0,$$

откъдето получаваме $f'(x_0) \leq 0$. Аналогично за $0 > h > -\delta$ имаме

$$0 \leq \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \to f'(x_0) \text{ при } h \to 0,$$

откъдето $f'(x_0) \geq 0$. Следователно $f'(x_0) = 0$.

Случаят, при който $f(x)$ има в точката x_0 локален минимум се свежда до вече разгледания чрез умножаване на функцията $f(x)$ с -1. $\square$



Геометричният смисъл на теоремата на Ферма е, че ако функцията $f(x)$ е диференцируема в x_0 и има локален екстремум в x_0, то допирателната към графиката на функцията $f(x)$ в точката $(x_0, f(x_0))$ е хоризонтална (успоредна на оста Ox).

10.2. Теорема на Рол.

Теорема 2 (на Рол). *Нека функцията $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната в затворения интервал $[a, b]$, диференцируема е в отворения интервал (a, b) и $f(a) = f(b)$. Тогава съществува такава точка $\xi \in (a, b)$, че $f'(\xi) = 0$.*

Доказателство. Тъй като по условие $f(x)$ е непрекъсната в затворения интервал $[a, b]$, то съществуват $x_1, x_2 \in [a, b]$ такива, че:

$f(x_1) = \inf\limits_{x \in [a,b]} f(x)$ - най-малка стойност в интервала $[a, b]$;

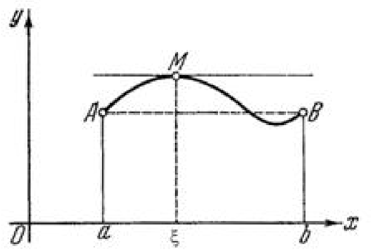
$f(x_2) = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$ - най-голяма стойност в интервала $[a, b]$.

Имаме следните възможности:

1) $x_1 \in (a, b)$. В този случай $f(x)$ има локален минимум в точката x_1. Тогава ако изберем $\xi = x_1$, от теоремата на Ферма следва, че $f'(\xi) = 0$.

2) $x_2 \in (a, b)$. В този случай $f(x)$ има локален максимум в точката x_2. Тогава ако изберем $\xi = x_2$, от теоремата на Ферма следва, че $f'(\xi) = 0$.

3) $x_1 = a$, $x_2 = b$ или обратно, $x_1 = b$, $x_2 = a$. Тъй като по условие имаме равенството $f(a) = f(b)$ в този случай се получава, че най-голямата стойност и най-малката стойност на функцията $f(x)$ съвпадат. Следователно $f(x)$ е константа и $f'(x) = 0$ за всяко $x \in (a, b)$. □



Геометричният смисъл на теоремата на Рол е, че съществува такава точка $\xi \in (a, b)$, за която е изпълнено, че допирателната към графиката на функцията $f(x)$ в точката $M(\xi, f(\xi))$ е хоризонтална.

10.3. Теорема на Лагранж.

Теорема 3 (за крайните нараствания, на Лагранж). *Нека функцията $f(x)$ е непрекъсната в затворения интервал $[a, b]$ и е диференцируема в отворения интервал (a, b). Тогава съществува такава точка $\xi \in (a, b)$, че*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

Доказателство. Разглеждаме функцията

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x, x \in [a, b].$$

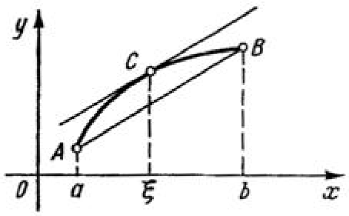
Имаме, че

$$h(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}a = \frac{f(a)b - f(a)a - f(b)a + f(a)a}{b - a} = \frac{f(a)b - f(b)a}{b - a}$$

и

$$h(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} b = \frac{f(b)b - f(b)a - f(b)b + f(a)b}{b - a} = \frac{f(a)b - f(b)a}{b - a},$$

т.е. $h(a) = h(b)$. Очевидно функцията $h(x)$ удовлетворява и останалите условия на теоремата на Рол, и следователно съществува такава точка $\xi \in (a, b)$, че $h'(\xi) = f'(\xi) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$. Оттук получаваме $f'(\xi) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$, с което теоремата е доказана. □



Геометричен смисъл на теоремата на Лагранж. Да разгледаме равенството от теоремата във вида

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

Лявата страна на равенството съвпада с ъгловия коефициент на секущата, минаваща през точките $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$. Според геометричното тълкуване на производната, дясната страна съвпада с ъгловия коефициент на допирателната към графиката на $f(x)$ в точката $C(\xi, f(\xi))$. След като две прави имат равни ъглови коефициенти, то те са успоредни. Така получаваме геометричната формулировка на теоремата на Лагранж:

Съществува точка в интервала (a, b), допирателната в която е успоредна на хордата, определена от крайните точки на интервала.

Следствие 1 (Критерий за константност). *Нека функцията $f(x)$ е диференцируема в отворения интервал (a, b). Функцията $f(x)$ е константа в интервала (a, b) тогава и само тогава, когато $f'(x) = 0$ за всяко $x \in (a, b)$.*

Доказателство. 1) Знаем, че ако $f(x) = C$-константа в интервала (a, b), то $f'(x) = 0$ за всяко $x \in (a, b)$.

2) Нека сега $f'(x) = 0$ за всяко $x \in (a, b)$. Фиксираме произволна точка $x_0 \in (a, b)$. По теоремата на Лагранж за всяко $x \in (a, b)$ имаме

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0) = 0,$$

и следователно $f(x) = f(x_0)$ за всяко $x \in (a, b)$. □

Следствие 2 (Критерий за монотонност). *Ако функцията $f(x)$ е диференцируема в отворения интервал (a, b), то тя е монотонно растяща (монотонно* *намаляваща) в (a, b) тогава и само тогава, когато $f'(x) \geq 0$ $(f'(x) \leq 0)$ за всяко $x \in (a, b)$.*

Доказателство. Достатъчно е да разгледаме случая на монотонно растяща функция, тъй като чрез умножаване с -1 от монотонно растящата функция се получава монотонно намаляваща и обратно.

1) Нека $f(x)$ е монотонно растяща диференцируема функция в интервала (a, b). Тогава за произволно $x \in (a, b)$ при достатъчно малки $h > 0$ имаме

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0.$$

Оттук след граничен преход при $h \to 0$ получаваме $f'(x) \geq 0$.

2) Нека $f'(x) \geq 0$ за всяко $x \in (a, b)$. Взимаме проиволни точки $x_1, x_2 \in (a, b)$ такива, че $x_1 < x_2$. По теоремата на Лагранж съществува такова $\xi \in (x_1, x_2)$, че

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \geq 0.$$

Оттук получаваме $f(x_1) \leq f(x_2)$, което доказва, че $f(x)$ е монотонно растяща в интервала (a, b). □

10.4. Теорема на Коши.

Теорема 4 (обобщена теорема за крайните нараствания, на Коши). *Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ са непрекъснати в затворения интервал $[a, b]$, диференцируеми са в отворения интервал (a, b) и $g'(x) \neq 0$ за всяко $x \in (a, b)$. Тогава съществува такава точка $\xi \in (a, b)$, че*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Доказателство. Разглеждаме функцията

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g(x), x \in [a, b].$$

Имаме, че

$$h(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g(a) = \frac{f(a)g(b) - f(a)g(a) - f(b)g(a) + f(a)g(a)}{g(b) - g(a)} = \\ = \frac{f(a)g(b) - f(b)g(a)a}{g(b) - g(a)}$$

и

$$h(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g(b) = \frac{f(b)g(b) - f(b)g(a) - f(b)g(b) + f(a)g(b)}{g(b) - g(a)} = \\ = \frac{f(a)g(b) - f(b)g(a)}{g(b) - g(a)},$$

т.е. $h(a) = h(b)$. Очевидно функцията $h(x)$ удовлетворява и останалите условия на теоремата на Рол, и следователно съществува такава точка $\xi \in (a, b)$, че $h'(\xi) = f'(\xi) - \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(\xi) = 0$. Оттук получаваме $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$, с което теоремата е доказана. □

Забележка. Условието $g'(x) \neq 0$ за всяко $x \in (a, b)$ гарантира $g(b) - g(a) \neq 0$, тъй като по теоремата на Лагранж имаме $g(b) - g(a) = g'(\xi_1)(b - a) \neq 0$.