6. Непрекъснатост на функция в точка – определение и свойства. Свойства на непрекъснатите функции в краен и затворен интервал

6.1. Определения.

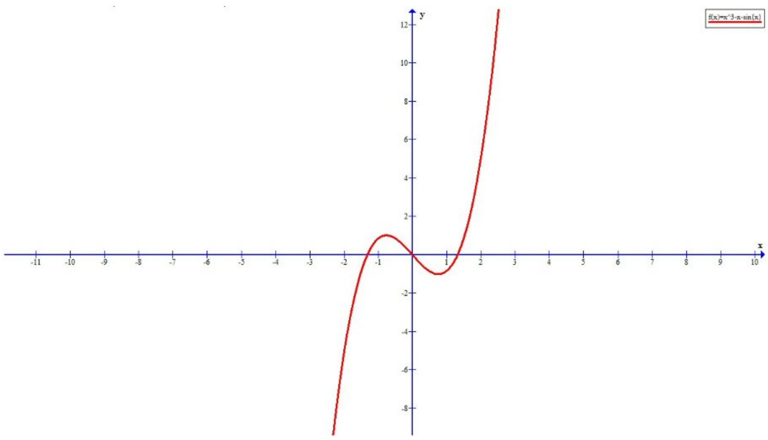
Определение 1. *Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в интервала (a, b) и $x_0 \in (a, b)$. Казваме, че $f(x)$ е* ***непрекъсната в точката*** *x_0, ако съществува крайната граница $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ и тази граница е равна на стойността на функцията в точката x_0:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Функцията $f(x)$ се нарича **непрекъсната в интервала** (a, b), ако тя е непрекъсната във всяка точка x от този интервал. Геометрично това означава, че можем да начертаем графиката на функцията в този интервал без да отделяме молива от хартията.

Функцията $f(x)$ се нарича **прекъсната в точката** x_0 от интервала (a, b), в който тя е дефинирана, ако функцията не е непрекъсната в тази точка. Геометрично това означава, че за да начертаем графиката на функцията в интервала (a, b) трябва да отделим молива от хартията в точката $M_0(x_0, f(x_0))$.

Пример 1. *Да разгледаме функцията $f(x) = x^3 - x - \sin x$ в интервала $(-\infty, +\infty)$. По-долу е поместена графиката на тази функция.*

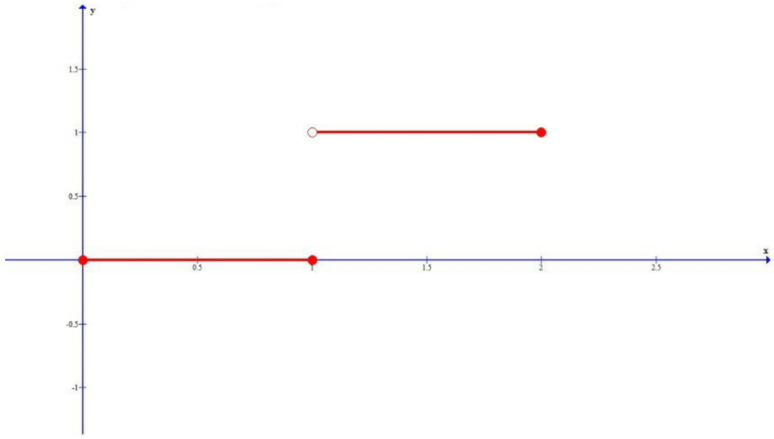


От графиката се вижда, че функцията $f(x) = x^3 - x - \sin x$ е непрекъсната.

Пример 2. *Да разгледаме функцията*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le 1 \\ 1, & 1 < x \le 2 \end{cases} .$$

Ето графиката на тази функция:



От графиката ясно се вижда, че функцията е прекъсната в токата $x_0 = 1$.

От определенията на Коши и Хайне за граница на функция веднага следва, че можем да използваме следните еквивалентни определения на понятието непрекъснатост:

Определение 2. *Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в интервала (a, b) и $x_0 \in (a, b)$. Казваме, че $f(x)$ е непрекъсната в точката $x_0 \in (a, b)$, ако:*

1) (Коши) за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta_\varepsilon > 0$ такова, че за всяко $x \in (a, b)$, за което $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$, е изпълнено $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

2) (Хайне) за всяка числова редица $\{x_n\}_n$ такава, че $x_n \in (a, b)$ за всяко $n \in \mathbb{N}$ и $x_n \to x_0$ е изпълнено $f(x_n) \to f(x_0)$.

Непосредствено от определението за непрекъснатост се получава следната

Теорема 1. *Ако функцията $f(x)$ е дефинирана в околност на точката x_0, $f(x_0) > 0$ ($f(x_0) < 0$) и $f(x)$ е непрекъсната в точката x_0, то съществува такава симетрична околност $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ на x_0, че $f(x) > \frac{f(x_0)}{2}$ ($f(x) < \frac{f(x_0)}{2}$) за всяко $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.*

6.2. Свойства на непрекъснатите функции.

Свойство 1. *Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ са дефинирани и непрекъснати в интервала (a, b). Тогава:*

1) Функията $f(x) \pm g(x)$ *е дефинирана и непрекъсната в* (a, b)*;*

2) Функията $f(x).g(x)$ *е дефинирана и непрекъсната в* (a, b)*;*

3) ако $g(x) \neq 0$ *за всяко* $x \in (a, b)$*, то функията* $\frac{f(x)}{g(x)}$ *е дефинирана и непрекъсната в* (a, b)*.*

Тези свойства следват непосредствено от съответните свойства на границите на функции или от определението на Хайне за непрекъснатост и свойствата на сходящите редици.

Накратко свойствата 1), 2) и 3) можем да формулираме така: сума, разлика произведение и частно (когато е дефинирано) на непрекъснати функции е непрекъсната функция.

Свойство 2. *Нека функцията* $f(x)$ *е дефинирана и непрекъсната в интервала* (a, b)*, а* $g(y)$ *е дефинирана и непрекъсната в интервала* (c, d)*, като* $(c, d) \supset \{f(x), x \in (a, b)\}$*. Тогава съставната функция* $h(x) = g(f(x))$ *е непрекъсната в* (a, b)*.*

Доказателство. Взимаме произволна точка $x_0 \in (a, b)$. Ще проверим с определението на Хайне, че функцията $h(x)$ е непрекъсната в x_0. Нека $\{x_n\}_n$ е произволна редица, за която е изпълнено $x_n \in (a, b)$ за всяко $n \in \mathbb{N}$ и $x_n \to x_0$. Тъй като $f(x)$ е непрекъсната в x_0, то от определенеието на Хайне следва, че $f(x_n) \to f(x_0)$. Ако означим $y_n = f(x_n)$ за всяко $n \in \mathbb{N}$ и $y_0 = f(x_0)$, то имаме, че $y_n \to y_0$. Сега от непрекъснатостта на $g(y)$ в точката y_0 веднага следва, че $g(f(x_n)) \to g(f(x_0))$, т.е. $h(x_n) \to h(x_0)$. С това свойството е доказано. $\square$

6.3. Непрекъснатост на монотонни функции.

Лема 1. *Нека функцията* $f(x)$ *е дефинирана и монотонна в интервала* (a, b) *и* $x_0 \in (a, b)$*. Тогава съществуват границите:*

1) $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$;

2) $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$;

3) $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$;

4) $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x)$.

Доказателство. Ще разгледаме случая, когато $f(x)$ е монотонно растяща функция и ще докажем, че съществува $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$.

В този случай множеството $\{f(x), x \in (a, b), x < x_0\}$ е ограничено отгоре от $f(x_0)$. Полагаме $M = \sup\{f(x), x \in (a, b), x < x_0\}$. Ще полажем, че $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = M$. Взимаме произволно $\varepsilon > 0$. Тъй като числото

$M-\varepsilon$ не е горна граница за разглежданото множество, то съществува такава точка $x_1 \in (a,b)$, $x_1 < x_0$, че $M-\varepsilon < f(x_1)$. Но тогава за $x \in (x_1, x_0)$ имаме $M-\varepsilon < f(x_1) \le f(x) \le M$, което показва, че $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x) = M$.

По аналогичен начин се доказва съществуването на останалите 3 граници. $\square$

Забележка 1. Аналогично се проверява, че ако $f(x)$ е монотонно растяща, то

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \sup\{f(x), x \in (a,+\infty)\}, \lim_{x\to-\infty} f(x) = \inf\{f(x), x \in (-\infty,b)\}.$$

Забележка 2. В условията на лемата е очевидно, че $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x) \le f(x_0) \le \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x)$, когато $f(x)$ е монотонно растяща и $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x) \ge f(x_0) \ge \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x)$, когато $f(x)$ е монотонно намаляваща. Оттук веднага следва, че $f(x)$ е непрекъсната в точката x_0 точно тогава, когато $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x)$.

Скок на функцията $f(x)$ ще наричаме разликата $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x) - \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x)$. Направената по-горе забележка можем да формулираме още и така: Една монотонна функция е непрекъсната в точката тогава и само тогава, когато скокът ѝ в тази точка е равен на 0.

Следващата теорема характеризира непрекъснатите монотонни функции.

Теорема 2. *Нека функцията $f(x)$ е дефинирана и монотонна в интервала (a,b). Функцията $f(x)$ е непрекъсната в интервала (a,b) тогава и само тогава, когато множеството от нейните функционални стойности е интервал.*

Доказателство. Нека да означим $R = \{f(x), x \in (a,b)\}$. Ако R е интервал, то Лема 1 и Забележка 2 след нея показват, че функцията е непрекъсната, тъй като в никоя точка $x_0 \in (a,b)$ не може да имаме ненулев скок.

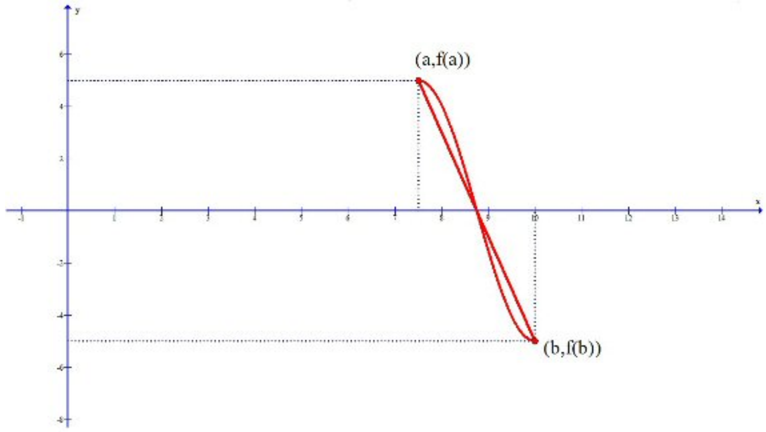
Обратно, ако $f(x)$ е непрекъсната в (a,b), то R е интервал според Следствие 2. $\square$

6.4. Свойства на непрекъснатите функции в краен и затворен интервал.

Теорема 3. *Нека функцията $f(x)$ е непрекъсната в интервала $[a,b]$ и $f(a).f(b) < 0$. Тогава съществува точка $x_0 \in (a,b)$ такава, че $f(x_0) = 0$.*

Геометричният смисъл на тази теорема е, че левият и десният край на графиката на функцията се намират в различни полуравнини относно оста Ox и затова графиката задължително пресича поне веднъж оста Ox.

Доказателство. Ще разгледаме случая, когато $f(a) > 0, f(b) < 0$. Другият случай се свежда до този чрез умножаване на функцията с -1.

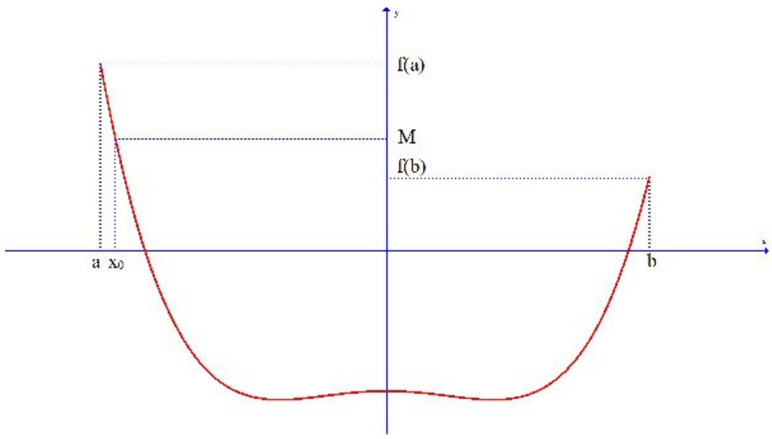


Разглеждаме множеството

$$A = \{x \in [a,b], f(x) > 0\}\,.$$

Очевидно A е ограничено и не е празно, тъй като $a \in A$. Полагаме $x_0 = \sup A$. Ще покажем, че $f(x_0) = 0$. Ако допуснем, че $f(x_0) > 0$, то от Теорема 1 следва, че съществува околност $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, в която $f(x) > 0$. От друга страна, съгласно начина, по който определихме множеството A, трябва за всяко $x > x_0$ да имаме $f(x) \leq 0$, т.е. достигнахме до противоречие.

Аналогично, ако допуснем, че $f(x_0) < 0$, със същите разсъждения отново ще получим противоречие. Следователно $f(x_0) = 0$, с което теоремата е доказана. □



Следствие 1 (Теорема за междинните стойности). *Нека функцията $f(x)$ е непрекъсната в интервала $[a,b]$. Тогава за всяко число M, намиращо се между числата $f(a)$ и $f(b)$, съществува $x_0 \in [a,b]$ такова, че $M = f(x_0)$.*

За да докажем това следствие е достатъчно да приложим теоремата към функцията $g(x) = f(x) - M$.

Геометричният смисъл на следствието е, че ако M е число между $f(a)$ и $f(b)$, то правата с уравнение $y = M$ пресича графиката на функцията $f(x)$.

Следствие 2. *Ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в интервала $[a,b]$, то множеството от функционални стойности $R = \{f(x), x \in [a,b]\}$ е интервал.*

Доказателство. Полагаме $\alpha = \inf R$ (или $\alpha = -\infty$, ако R не е ограничено отдолу) и $\beta = \sup R$ (или $\beta = +\infty$, ако R не е ограничено отгоре). Ще докажем, че R е интервал с краища α и β.

Първо, от определението на числата α и β следва, че всяка точка от R принадлежи на интервла (α, β) или евентуално съвпада с някой от неговите краища α и β (когато те са числа).

Второ, нека вземем произволно $y \in (\alpha, \beta)$. От определението на числата α и β следва, че можем да намерим точки $x_1, x_2 \in [a, b]$ такива, че $f(x_1) < y < f(x_2)$. Тъй като съгласно Следствие 1 всяко число между $f(x_1)$ и $f(x_2)$ е функционална стойност на функцията f, то $y \in R$. Показахме, че $(\alpha, \beta) \subset R$, което доказва теоремата. □

Теорема 4 (Вайерщрас). *Ако една функция е дефинирана и непрекъсната в краен и затворен интервал, то тя е ограничена и има най-голяма и най-малка стойност.*

Доказателство. Нека функцията $f(x)$ е непрекъсната в интервала $[a, b]$. Ще докажем, че тя е ограничена. Допускаме противното. Тогава за всяко естествено число n съществува точка $x_n \in [a, b]$ такава, че $|f(x_n)| \geq n$.

Разглеждаме получената по този начин редица $\{x_n\}_n$. Тъй като тя е ограничена по теоремата на Болцано-Вайерщрас можем да изберем сходяща подредица $x_{n_k} \to x_0 \in [a, b]$. Но тогава поради непрекъснатостта на функцията f имаме $f(x_{n_k}) \to f(x_0)$, и следователно редицата $\{f(x_{n_k})\}_k$ трябва да бъде ограничена (тъй като е сходяща). От друга страна, по построение имаме $|f(x_{n_k})| \geq n_k \to +\infty$, т.е. стигаме до противоречие.

Полагаме $M = \sup \{f(x), x \in [a, b]\}$. Ще докажем, че числото M е функционална стойност на функцията f. Допускаме противното, т.е., че $f(x) < M$ за всяко $x \in [a, b]$. Тогава функцията $g(x) = \frac{1}{M - f(x)}$ е дефинирана и непрекъсната в интервала $[a, b]$, понеже $M - f(x) \neq 0$. Съгласно доказаното по-горе функцията $g(x)$ е ограничена, т.е. съществува $C > 0$ такова, че $g(x) = \dfrac{1}{M - f(x)} \leq C$ за всяко $x \in [a, b]$. Оттук получаваме, че $f(x) \leq M - \frac{1}{C}$ за всяко $x \in [a, b]$, което противоречи на определението на числото M. Полученото противоречие доказва съществуването на $x_1 \in [a, b]$ такова, че $M = f(x_1)$. С това показахме, че функцията f има най-голяма стойност.

Аналогични разсъждения показват, че функцията f има най-малка стойност. За целта полагаме $m = \inf \{f(x), x \in [a, b]\}$. Ако допуснем, че за всяко $x \in [a, b]$ имаме $f(x) > m$, то функцията $h(x) = \frac{1}{f(x) - m}$ ще бъде дефинирана и непрекъсната в интервала $[a, b]$, а следователно и ограничена. Оттук получаваме противоречие. Действително, ако числото C е горна граница на функцията h, то за всяко $x \in [a, b]$ имаме $h(x) = \dfrac{1}{f(x) - m} \leq C \implies f(x) \geq m + \dfrac{1}{C}$, което противоречи на избора на числото m. Следователно съществува $x_2 \in [a, b]$ такова, че $m = f(x_2)$. С това теоремата е доказана. □

Следствие 3. *Ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в интервала $[a, b]$, то множеството й от стойности $\{f(x), x \in [a, b]\}$ е краен затворен интервал.*

Това следва непосредствено от Следствие 2 и теоремата на Вайерщрас.