5. Граница на функция – определение и свойства. Едностранни граници. Безкрайно малки и безкрайно големи функции

5.1. Граница на функция

Определение 1. *Нека $X \subset \mathbb{R}$. Казваме, че $x_0 \in \mathbb{R}$ е* ***точка на сгъстяване*** *на множеството X, ако във всяка околност на x_0 има точка от X, различна от x_0, т.е.*

$$\text{за всяко } \delta > 0 \text{ съществува } x \in X, x \neq x_0 \text{ такова, че } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\,.$$

С по-прости думи, точка на сгъстяване на едно множество е такава точка, около която има точки от множеството (различни от нея), които са произволно близо.

Една точка не е точка на сгъстяване на множеството, ако съществува нейна околност, в която няма други точки от множеството.

Важно е да се отбележи, че точките на сгъстяване на множеството не е задължително да принадлежат на това множество.

Пример 1. *Числото 0 е точка на сгъстяване на множеството $X = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ въпреки, че $0 \notin X$.*

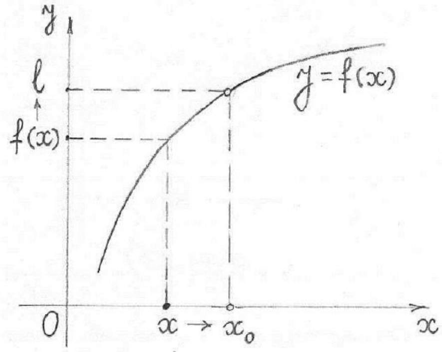
Твърдението в Пример 1 следва непосредствено от вече известната граница на числова редица $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Теорема 1. *Числото x_0 е точка на сгъстяване на множеството X тогава и само тогава, когато съществува редица $\{x_n\}_n$ такава, че $x_n \in X \setminus \{x_0\}$ за всяко $n \in \mathbb{N}$ и $x_n \to x_0$.*

Доказателство. 1) Ако x_0 е точка на сгъстяване на X, то за всяко $n \in \mathbb{N}$ можем да изберем $x_n \in X \setminus \{x_0\}$, удовлетворяваща $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$. Това е възможно, тъй като околността $\left(x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right)$ на x_0 съдържа точки от X, различни от x_0. Получената редица $\{x_n\}_n$ клони към x_0, понеже по построение $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ за всяко $n \in \mathbb{N}$.

2) Ако съществува редица $\{x_n\}_n$ такава, че $x_n \in X \setminus \{x_0\}$ за всяко $n \in \mathbb{N}$ и $x_n \to x_0$, то във всяка околност на x_0 ще има (дори безброй много) членове на тази редица, и следователно, x_0 ще бъде точка на сгъстяване на X. $\square$

Нека функцията $y = f(x)$ е дефинирана в интервала (a, b) с евентуално изключение на точката x_0 от този интервал. Да приемем, че в околност на точката x_0 функцията има поведението, представено чрез графиката.



Вижда се, че числото ℓ има следните свойства:

Първо, когато точката x е близка до точката x_0, функционалната стойност $f(x)$ е близка до числото ℓ. При това, когато x става все по-близо и по-близо до x_0, стойността $f(x)$ става все по-близо и по-близо до ℓ.

Второ, разстоянията между точките $f(x)$ и точката ℓ от оста Oy може да станат толкова малки, колкото си пожелаем, щом точките x са достатъчно близки до x_0. Интуитивно е ясно, че ако това свойство е налице, то налице е и първото, когато x е достатъчно близо до x_0.

Числото ℓ, притежаващо второто свойство, се нарича граница на функцията $f(x)$ при x клонящо към x_0.

Определение 2. *Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в множеството $X \subset \mathbb{R}$ и x_0 е точка на сгъстяване за X. Казваме, че числото ℓ е граница на функцията $f(x)$ при x клонящо към x_0 (записваме $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ или $f(x) \to \ell$ при $x \to x_0$), ако:*

1) (Коши) за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta_\varepsilon > 0$ такова, че за всяко $x \in X$, за което $0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon$, е изпълнено $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.

2) (Хайне) за всяка числова редица $\{x_n\}_n$ такава, че $x_n \in X \setminus \{x_0\}$ за всяко $n \in \mathbb{N}$ и $x_n \to x_0$ е изпълнено $f(x_n) \to \ell$.

Числото δ в определението на Коши зависи от избора на ε. Вижда се, че ако условията са изпълнени за някое число δ, то те ще са изпълнени и за всяко друго по-малко положително число.

Теорема 2. *Определенията на Коши и Хайне за граница на функция са еквивалентни.*

Доказателство. 1) Нека $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ по определението на Коши. Вземаме произволна редица $\{x_n\}_n$ такава, че $x_n \in X \setminus \{x_0\}$ за всяко $n \in \mathbb{N}$ и $x_n \to x_0$. Фиксираме произволно число $\varepsilon > 0$ и избираме $\delta > 0$ така, че щом $x \in X$ и $0 < |x - x_0| < \delta$ да имаме $|f(x) - \ell| < \varepsilon$. Тъй като $x_n \to x_0$, то съществува такова число ν, че при $n > \nu$ е изпълнено $|x - x_0| < \delta$, а следователно и $|f(x_n) - \ell| < \varepsilon$. С това показахме, че $f(x_n) \to \ell$, т.е., че от определението на Коши следва определението на Хайне.

2) Сега ще покажем, че от определението на Хайне следва определението на Коши. Допускаме противното, т.е., че за някоя функция $f : X \to \mathbb{R}$ числото ℓ е граница при $x \to x_0$ по определението на Хайне, но условието в определението на Коши не е изпълнено. Тогава съществува такова число $\varepsilon_0 > 0$, че за всяко число $\delta > 0$ съществува $x \in X$, за което са изпълнени неравенствата $0 < |x - x_0| < \delta$ и $|f(x) - \ell| \geq \varepsilon$. Даваме на δ последователно стойностите $\dfrac{1}{n}, n = 1, 2, 3, \ldots$ и получаваме съответни точки $x_n \in X$ такива, че $0 < |x_n - x_0| < \dfrac{1}{n}$ и $|f(x_n) - \ell| \geq \varepsilon_0$. Разглеждаме получената по този начин редица $\{x_n\}_n$. Очевидно $x_n \to x_0$, тъй като $|x_n - x_0| < \dfrac{1}{n}$ за всяко n. От друга страна, редицата $\{f(x_n)\}_n$ не клони към ℓ, тъй като $|f(x_n) - \ell| \geq \varepsilon_0$ за всяко n. Това противоречи на предположението, че $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ по определението на Хайне. Полученото противоречие показва, че ако числото ℓ е граница на $f(x)$ при $x \to x_0$ по определението на Хайне, то функцията има същата граница и по определението на Коши. $\square$

5.2. Свойства на границите на функции.

Теорема 3 (за аритметични операции). *Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ са дефинирани в множество $X \subset \mathbb{R}$ и нека $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = b$. Тогава:*

1) $\lim_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = a \pm b$;

2) $\lim_{x\to x_0} (f(x).g(x)) = a.b$;

3) ако $b \neq 0$, *то* $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a}{b}$.

Като използваме определението на Хайне, тази теорема е непосредствено следствие от теоремата за аритметични операции с граница на числови редици.

Теорема 4 (за граничен преход в неравенства). *Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ са дефинирани в множество $X \subset \mathbb{R}$ и нека $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = b$. Тогава ако $f(x) \leq g(x)$ за всяко $x \in X$, то $a \leq b$.*

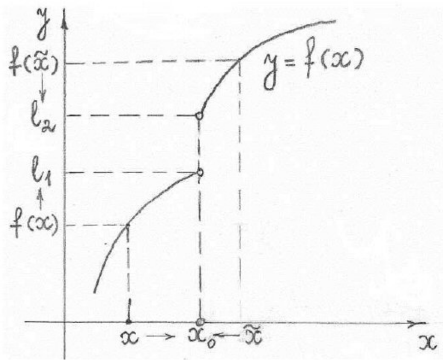
Като използваме определението на Хайне, тази теорема отново е непосредствено следствие от аналогичната теоремата за граници на числови редици.

Теорема 5 (Лема за двамата полицаи за функции). *Нека функциите $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ са дефинирани в множество $X \subset \mathbb{R}$ и е изпълнено $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ за всяко $x \in X$. Ако $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = \ell$, то границата $\lim_{x\to x_0} g(x)$ съществува и също е равна на ℓ.*

Като използваме определението на Хайне, тази теорема е непосредствено следствие от лемата за двамата полицаи за числови редици.

5.3. Едностранни граници.

Да разгледаме сега функцията $f(x)$, чиято графика е представена на чертежа.



Вижда се, че разстоянията между функционалните стойности $f(x)$ и точката ℓ_1 от оста Oy може да станат толкова малки, колкото си пожелаем, само ако точките x се намират достатъчно близко до точката x_0 отляво на нея, т.е. при $x < x_0$. Аналогично, разстоянията между функционалните стойности $f(\tilde{x})$ и точката ℓ_2 може да станат толкова малки, колкото си пожелаем, само когато точките $\tilde{x}$ са достатъчно близко до точката x_0 отдясно на нея, т.е. при $\tilde{x} > x_0$. Ето защо числото ℓ_1 се нарича лява граница на функцията $f(x)$ при x клонящо към x_0, а ℓ_2 - дясна граница на функцията $f(x)$ при x клонящо към x_0.

Определение 3. *Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в множеството $X \subset \mathbb{R}$ и x_0 е точка на сгъстяване за X. Казваме, че числото ℓ е* ***лява граница*** *на функцията $f(x)$ при x клонящо към x_0 (записваме $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \ell$), ако:*

1) (Коши) за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta_\varepsilon > 0$ такова, че за всяко $x \in X$, за което $x_0 - \delta_\varepsilon < x < x_0$, е изпълнено $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.

2) (Хайне) за всяка числова редица $\{x_n\}_n$ такава, че $x_n \in X \setminus \{x_0\}, x_n < x_0$, за всяко $n \in \mathbb{N}$ и $x_n \to x_0$ е изпълнено $f(x_n) \to \ell$.

Определение 4. *Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в множеството $X \subset \mathbb{R}$ и x_0 е точка на сгъстяване за X. Казваме, че числото ℓ е* ***дясна граница*** *на функцията $f(x)$ при x клонящо към x_0 (записваме $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \ell$), ако:*

1) (Коши) за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta_\varepsilon > 0$ такова, че за всяко $x \in X$, за което $x_0 < x < x_0 + \delta_\varepsilon$, е изпълнено $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.

2) (Хайне) за всяка числова редица $\{x_n\}_n$ такава, че $x_n \in X \setminus \{x_0\}, x_n > x_0$, за всяко $n \in \mathbb{N}$ и $x_n \to x_0$ е изпълнено $f(x_n) \to \ell$.

Теорема 6. *Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в множеството $X \subset \mathbb{R}$ и x_0 е точка на сгъстяване за X. Числото ℓ е граница на $f(x)$ при $x \to x_0$ тогава и само тогава, когато ℓ е едновременно лява и дясна граница на $f(x)$ при $x \to x_0$.*

Доказателство. 1) Нека $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$. Тогава от определенията за граница и за лява и дясна граница е очевидно, че $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \ell$.

2) Нека сега $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \ell$. Взимаме произволно число $\varepsilon > 0$. Тъй като $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \ell$, то съществува число $\delta_1 > 0$ такова, че щом $x \in X$ и $x_0 - \delta_1 < x < x_0$ да имаме $|f(x) - \ell| < \varepsilon$. Аналогично, от $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \ell$ следва, че можем да изберем число $\delta_2 > 0$ такова, че щом $x \in X$ и $x_0 < x < x_0 + \delta_2$, да имаме $|f(x) - \ell| < \varepsilon$. Нека да положим $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Тогава щом $x \in X$ и $|x - x_0| < \delta$ ще имаме $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.

□

5.4. Граници на функции при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$.

Определение 5. *Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в множеството $X \subset \mathbb{R}$. Казваме, че числото ℓ е граница на функцията $f(x)$ при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$), ако:*

1) (Коши) за всяко $\varepsilon > 0$ съществува B_ε такова, че за всяко $x \in X$, за което $x > B_\varepsilon$ ($x < B_\varepsilon$), е изпълнено $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.

2) (Хайне) за всяка числова редица $\{x_n\}_n$ такава, че $x_n \in X$ за всяко $n \in \mathbb{N}$ и $x_n \to +\infty$ ($x_n \to -\infty$) е изпълнено $f(x_n) \to \ell$.

Еквивалентността на двете определения се доказва по подобен на вече представения по-горе начин.

Чрез определението на Хайне лесно се вижда, че свойствата на границите от теореми 3, 4 и 5, са валидни и при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$) - достатъчно е само вместо $x \to x_0$ да пишем $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$.

5.5. Функции, клонящи към $+\infty$ и $-\infty$.

Определение 6. *Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в множеството $X \subset \mathbb{R}$ и x_0 е точка на сгъстяване за X. Казваме, че функцията $f(x)$ клони към $+\infty$ ($-\infty$) при x клонящо към x_0 (записваме $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty(-\infty)$ или $f(x) \to +\infty(-\infty)$ при $x \to x_0$), ако:*

1) (Коши) за всяко число A съществува $\delta_A > 0$ такова, че за всяко $x \in X$, за което $0 < |x - x_0| < \delta_A$, е изпълнено $f(x) > A$ ($f(x) < A$).

2) (Хайне) за всяка числова редица $\{x_n\}_n$ такава, че $x_n \in X \setminus \{x_0\}$ за всяко $n \in \mathbb{N}$ и $x_n \to x_0$ е изпълнено $f(x_n) \to +\infty(-\infty)$.

Определение 7. *Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в множеството $X \subset \mathbb{R}$. Казваме, че функцията $f(x)$ клони към $+\infty$ $(-\infty)$ при $x \to +\infty$, ако:*

1) (Коши) за всяко число A съществува B_A такова, че за всяко $x \in X$, за което $x > B_A$, е изпълнено $f(x) > A$ $(f(x) < A)$.

2) (Хайне) за всяка числова редица $\{x_n\}_n$ такава, че $x_n \in X$ за всяко $n \in \mathbb{N}$ и $x_n \to +\infty$ е изпълнено $f(x_n) \to +\infty(-\infty)$.

Определение 8. *Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в множеството $X \subset \mathbb{R}$. Казваме, че функцията $f(x)$ клони към $+\infty$ $(-\infty)$ при $x \to -\infty$, ако:*

1) (Коши) за всяко число A съществува B_A такова, че за всяко $x \in X$, за което $x < B_A$, е изпълнено $f(x) > A$ $(f(x) < A)$.

2) (Хайне) за всяка числова редица $\{x_n\}_n$ такава, че $x_n \in X$ за всяко $n \in \mathbb{N}$ и $x_n \to -\infty$ е изпълнено $f(x_n) \to +\infty(-\infty)$.

Не е трудно да се докаже еквивалентността на всяка двойка определения на Коши и на Хайне.

Теорема 7. *Ако функцията $f(x)$ приема само положителни (отрицателни) стойности, то тя клони към $+\infty$ $(-\infty)$ при $x \to x_0$ (или $x \to \pm\infty$) тогава и само тогава, когато $\dfrac{1}{f(x)} \to 0$ при $x \to x_0$ (или съответно $x \to \pm\infty$).*

Тази теорема е отново следствие от свойствата на границите на числовите редици като се използва съответното определение на Хайне.

5.6. Безкрайно малки и безкрайно големи функции.

Определение 9. *Казваме, че функцията $f(x)$ е безкрайно малка при $x \to x_0$ (или $x \to \pm\infty$), ако $f(x) \to 0$ при $x \to x_0$ (или съответно $x \to \pm\infty$).*

Определение 10. *Казваме, че функцията $f(x)$ е безкрайно голяма при $x \to x_0$ (или $x \to \pm\infty$), ако $|f(x)| \to +\infty$ при $x \to x_0$ (или съответно $x \to \pm\infty$).*

Свойство 1. *Нека функциите f и g са безкрайно малки при $x \to x_0$ (или $x \to \pm\infty$). Тогава при $x \to x_0$ (или съответно $x \to \pm\infty$) са безкрайно малки и функциите $f+g$, $f-g$ и $f.g$.*

Свойство 2. *Ако функцията f е безкрайно малка при $x \to x_0$, а функцията g е ограничена в околност U на точката x_0, то при $x \to x_0$ функцията $f.g$ е безкрайно малка.*

Свойство 3. *Ако функцията $f(x)$ е безкрайно голяма, а $g(x) \to B > 0$ при $x \to x_0$ (или $x \to \pm\infty$), то функциите $f + g$, $f - g$ и $f.g$ са безкрайно големи при $x \to x_0$ (или $x \to \pm\infty$).*

Символично свойство 3 може да се запише така: $\pm\infty \pm B = \pm\infty$, $\pm\infty.B = \pm\infty, B > 0$.

Свойство 4. *Ако функциите $f(x)$ и $g(x)$ клонят към $+\infty$ при $x \to x_0$ (или $x \to \pm\infty$), то функциите $f + g$ и $f.g$ също клонят към $+\infty$ при $x \to x_0$ (или $x \to \pm\infty$).*

Символично свойство 4 може да се запише така: $(+\infty)+(+\infty) = +\infty$, $(+\infty).(+\infty) = +\infty$.

Свойство 5. *Ако функциите $f(x)$ и $g(x)$ клонят към $-\infty$ при $x \to x_0$ (или $x \to \pm\infty$), то функцията $f + g$ клони към $-\infty$, а $f.g$ - към $+\infty$ при $x \to x_0$ (или $x \to \pm\infty$).*

Символично свойство 5 може да се запише така: $(-\infty)+(-\infty) = -\infty$, $(-\infty).(-\infty) = +\infty$.