1. Множества. Операции с множества

1.1. Понятията множество и елемент на множество.

Понятието **множество** е първично в математиката и не може да се дефинира чрез други понятия. По интуиция обаче на всички е ясно какво е множество - това е съвкупност от някакви обекти, които се наричат **елементи** на множеството.

Прието е множествата да се означават с големи латински букви (A, B, C, X, Y, Z, $\ldots$), а с малки латински букви - техните елементи (a, b, c, x, y, z, $\ldots$).

Множества могат да бъдат зададени по няколко начина:

1) $A = \{$ябълка, круша, дюля$\}$ - чрез изброяване на всички елементи;

2) $A = \{x$: x е естествено четно число$\}$ - чрез задаване на условие, което елементите удовлетворяват;

3) $A = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ или $A = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$ - чрез посочване на част от елементите (трябва да е очевидно кои са останалите елементи).

Елементите на всяко множество са неповтарящи се (т.е. множествата $\{1, 1, 2\}$ и $\{1, 2\}$ са всъщност едно и също множество). Също така елементите на множествата са неподредени (т.е. няма значение дали се записва $\{1, 2\}$ или $\{2, 1\}$, това отново е едно и също множество).

Множеството, което не съдържа нито един елемент, се нарича **празно множество** и се бележи със символа $\varnothing$.

Нека A е множество. Това, че x е елемент на A, се записва с формула така:
$x \in A$ (чете се x *принадлежи на* A или x *е елемент на* A).
$A \ni x$ (чете се A *съдържа* x).

Формулата $x \notin A$ означава, че x не е елемент на множеството A (чете се още като x *не принадлежи на* A).

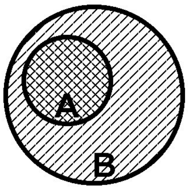
Пример 1. *Нека A е множеството на малките букви в българската азбука, т.е. $A = \{$а, б, в, г, д, ..., ю, я$\}$. Тогава е вярно, че буквата н $\in A$, но $n \notin A$ и $\nu \notin A$.*

1.2. Подмножество.

Определение 1. *Казваме, че множеството A е* ***подмножество*** *на множеството B (записва се $A \subset B$), ако всеки елемент x на A е елемент и на B.*

Символично (с формули) Определение 1 се записва по следния начин:

$$A \subset B \Longleftrightarrow \forall x \in A \Longrightarrow x \in B.$$



Тук символът $\Longrightarrow$ означава **логическо следствие** и се чете *от ... следва ...* . Символът $\Longleftrightarrow$ означава **логическа еквивалентност** и се чете *... е еквивалентно с ...* или *... тогава и само тогава, когато ...* .

Пример 2. *Нека $A = \{x : x$ е естествено число, което се дели на $6\}$, $B = \{x : x$ е естествено число, което се дели на $3\}$. Тогава $A \subset B$, тъй като всяко естествено число, което се дели на 6, се дели също така и на 3.*

Пример 3. *Ако $A = \varnothing$ и B е произволно множество, то $A \subset B$. Тъй като в A не се съдържа нито един елемент, формално е изпълнено изискването всеки елемент от A да бъде елемент и на B.*

1.3. Еквивалентност на множества.

Определение 2. *Казваме, че множествата A и B са* ***еквивалентни*** *(или* ***съвпадат****), когато те се състоят от едни и същи елементи. Записва се $A = B$.*

Теорема 1. *Множествата A и B са еквивалентни тогава и само тогава, когато $A \subset B$ и $B \subset A$.*

Доказателство. Първо ще докажем, че $A = B \Longrightarrow A \subset B$ и $B \subset A$. Нека $A = B$. Тогава от Определение 2 знаем, че A и B се състоят от едни и същи елементи. Следователно всеки елемент на първото множество е елемент и на второто (т.е. $A \subset B$), и също така, всеки елемент на второто е елемент и на първото (т.е. $B \subset A$).

Сега остава да докажем и че $A \subset B$ и $B \subset A \Longrightarrow A = B$. Нека $A \subset B$ и $B \subset A$. Да допуснем, че $A \neq B$. Това означава, че съществува елемент от A, който не е от B или, че съществува елемент от B, който не е от A. Но тогава от Определение 1 следва, че A не е подмножество на B или, че B не е подмножество на A. Това обаче противоречи на даденото (че $A \subset B$ и $B \subset A$). $\square$

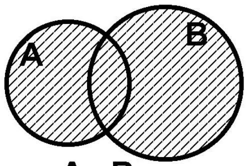
1.4. Основни операции с множества.

Ще дефинираме трите основни операции с множества - обединение, сечение и разлика.

Определение 3. ***Обединение*** *на две множества A и B наричаме това множество (означава се с $A \cup B$), което съдържа всички елементи както на A, така и на B, т.е.*

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ или } x \in B\};$$

$$x \in A \cup B \Longleftrightarrow x \in A \text{ или } x \in B.$$

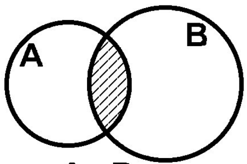


A∪B

Определение 4. ***Сечение*** *на две множества A и B наричаме това множество (означава се с $A \cap B$), което е съставено от общите елементи на A и на B, т.е.*

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ и } x \in B\};$$

$$x \in A \cap B \Longleftrightarrow x \in A \text{ и } x \in B.$$

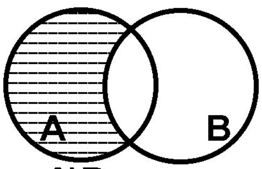


A∩B

Определение 5. ***Разлика*** *на две множества A и B наричаме това множество (означава се с $A \setminus B$), което е съставено от тези елементи на A, които не принадлежат на B, т.е.*

$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ и } x \notin B\};$$

$$x \in A \setminus B \Longleftrightarrow x \in A \text{ и } x \notin B.$$



A\B

Пример 4. *Нека $A = \{1, 2, 3, \ldots, 9\}$, $B = \{3, 6, 9, 12\}$. Тогава:*
$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 12\}$;
$A \cap B = \{3, 6, 9\}$;
$A \setminus B = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$.

Освен обединение на две множества можем да разглеждаме обединение на фамилия от множества. Ако T е множество и на всяко $t \in T$ е съпоставено множество A_t, то казваме, че е зададена фамилия от множества $A_t, t \in T$.

Елементите на T играят ролята на индекси на множествата A_t от фамилията. Обединението $\bigcup\limits_{t \in T} A_t$ на фамилията $A_t, t \in T$ се дефинира като множество, съставено от всички елементи на множествата A_t, т.е.

$$x \in \bigcup_{t \in T} A_t \iff x \in A_t \text{ за някое } t \in T.$$

Аналогично се дефинира сечение $\bigcap\limits_{t \in T} A_t$ на фамилията множества $A_t, t \in T$ - като множество, съставено от елементите, които са общи за всички множества от фамилията, т.е.

$$x \in \bigcap_{t \in T} A_t \iff x \in A_t \text{ за всяко } t \in T.$$