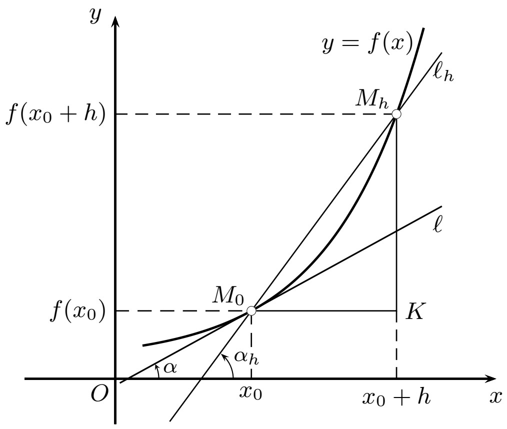
# 5. Производна на функция и нейният геометричен и механичен смисъл

## 5.1. Допирателна към графиката на функция.




Фиг. 1

Да предположим, че функцията $y = f(x)$ е дефинирана в интервала $(a, b)$ и е непрекъсната в точката $x_0$ от този интервал. Нека $h$ е толкова малко ($h \neq 0$), че точката $x_0 + h$ да принадлежи също на $(a, b)$. Да разгледаме съответните точки $M_0(x_0, f(x_0))$ и $M_h(x_0 + h, f(x_0 + h))$ от графиката на функцията $y = f(x)$, вж. фиг. 1. Тези две точки определят права $\ell_h$, която се нарича *секуща към графиката на $f$*. Изменението на $h$ поражда съответно движение на точката $M_h$ по графиката на $f$, а следователно и на секущата $\ell_h$, представляващо завъртане около точката $M_0$. При това, когато $h$ става все по-малко и по-малко, точката $M_h$ става все по-близо и по-близо до точката $M_0$, щом функцията $f(x)$ е непрекъсната в точката $x_0$. Можем да очакваме, че при това приближаване на $M_h$ към $M_0$ секущата $\ell_h$ ще заеме някакво гранично положение $\ell$, т. е. ще се превърне в права, минаваща през две "безкрайно близки" точки.

**Определение 5.1.** *Граничното положение $\ell$ на секущата $\ell_h$, ако има такова, когато точката $M_h$ се приближава към $M_0$, оставайки върху графиката на $f$, се нарича* ***допирателна*** *(или* ***тангента****)* ***към графиката на функцията*** *$f(x)$* ***в точката*** *$M_0$.*

Както вече пояснихме по-горе, това приближаване на точката $M_h$ към $M_0$ става точно тогава, когато $h$ клони към нула.

Да отговорим на въпроса за съществуване на допирателна и да изведем нейното уравнение, когато тя съществува. Тъй като всяка секуща $\ell_h$ съединява две различни точки от графиката на функция – точките $M_0$ и $M_h$, то $\ell_h$ не е перпендикулярна на оста $Ox$. Нейното уравнение можем да запишем във формата на уравнение на права, минаваща през точката $M_0(x_0, f(x_0))$ и имаща ъглов коефициент $m_h$:

$$\ell_h : \quad y - f(x_0) = m_h\,(x - x_0), \tag{5.1а}$$

където

$$m_h = \frac{\overline{KM_h}}{\overline{M_0K}} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \tag{5.1б}$$

вж. фиг. 1. В уравнението (5.1а) единствено ъгловият коефициент $m_h$ зависи от $h$. Щом допирателната $\ell$ е граничното положение на секущата $\ell_h$, когато $h$ клони към нула, то от уравненията (5.1) веднага можем да направим следното заключение:

*Графиката на функцията $f(x)$ има в точката $M_0(x_0, f(x_0))$ допирателна $\ell$, която не е перпендикулярна на оста $Ox$, тогава и само тогава, когато съществува границата*

$$m = \lim_{h\to 0} m_h = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \tag{5.2а}$$

*При това, нейното уравнение е*

$$\ell : \quad y - f(x_0) = m\,(x - x_0)\ . \tag{5.2б}$$

По-горе предполагахме, че *границата* в (5.2а) *е крайна*, което води до изискването допирателната $\ell$ да не е перпендикулярна на оста $Ox$. Дали има допирателна към графиката на $f(x)$, когато от (5.2а) получим $m = +\infty$ или $m = -\infty$ ? За да отговорим на този въпрос, да си спомним, че $m_h = \operatorname{tg} \alpha_h$, където $\alpha_h$ е ъгълът, който секущата $\ell_h$ сключва с положителната посока на оста $Ox$, вж. фиг. 1. Можем да считаме, че $-\dfrac{\pi}{2} < \alpha_h < \dfrac{\pi}{2}$. Функцията $\operatorname{tg} \alpha_h$, разглеждана в интервала $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$, клони към $+\infty$ само когато $\alpha_h \to \frac{\pi}{2}$ и клони към $-\infty$ само когато $\alpha_h \to -\frac{\pi}{2}$. Следователно и в двата случая секущата $\ell_h$ има гранично положение $\ell$ – допирателната към графиката на $f(x)$, но сега е *перпендикулярна на оста* $Ox$. Тъй като $\ell$ минава през точката $M_0(x_0, f(x_0))$, то сега нейното уравнение е $x = x_0$. Така показахме, че ако

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = +\infty \text{ или } -\infty, \quad (5.3)$$

то графиката на функцията $y = f(x)$ има *вертикална допирателна* $x = x_0$ в точката $M_0(x_0, f(x_0))$.

## 5.2. Производна на функция и нейният геометричен смисъл.

Ако означим $x = x_0 + h$, разликата $\Delta x = h = x - x_0$ във формули (5.2а) и (5.3) има смисъл на нарастване на аргумента на функцията $f(x)$ относно стойността му $x_0$. Аналогично разликата

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(x_0+h) - f(x_0) \\ &= f(x_0+\Delta x) - f(x_0)\,, \end{aligned}$$

означавана още с $\Delta y$, представлява нарастването на функцията $f(x)$ в точката $x_0$, съответстващо на нарастването $\Delta x$ на $x$ в тази точка. Отношението

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \quad (5.4)$$

представлява ъгловия коефициент на секущата $M_0M$ (вж. фиг. 1) и се нарича *диференчно частно* (или *частно на Нютон*).

Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в интервал $(a, b)$, съдържащ точката $x_0$.

**Определение 5.2.** ***Производна на функцията*** $f(x)$ ***в точката*** $x_0$ *се нарича границата на диференчното частно* $\Delta f/\Delta x$ *при* $\Delta x$ *клонящо към нула, ако тя съществува, т. е.,*

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\,. \quad (5.5)$$

Ако в точката $x_0$ е в сила (5.3), казваме, че *функцията* $f(x)$ *има безкрайна производна в точката* $x_0$.

Следователно можем да преформулираме направеното в т. 5.1 заключение по следния начин.

**Теорема 5.1.** *Графиката на функцията* $f(x)$ *има в точката* $M_0(x_0, f(x_0))$ *допирателна, която не е перпендикулярна на оста* $Ox$*, тогава и само тогава, когато* $f(x)$ *има производна в точката* $x_0$*. При това ъгловият коефициент* $m$ *на допирателната е равен на тази производна:*

$$m = f'(x_0)\,. \quad (5.6)$$

В случая, когато функцията има безкрайна производна в точката $x_0$, графиката ѝ също има допирателна в точката $M_0(x_0, f(x_0))$, но тя е вертикална (перпендикулярна на оста $Ox$). Ако обаче една функция $f(x)$ няма производна в точката $x_0$ (нито крайна, нито безкрайна), то графиката ѝ няма допирателна в точката $M_0(x_0, f(x_0))$, която в този случай представлява "ъглова точка" от графиката. Такава е, например, функцията $f(x) = |x|$, която ще разгледаме по-нататък.

## 5.3. Примери.

Да разгледаме накрая два прости примера, илюстриращи намирането на производна на функция.

**Пример 1 (Линейната функция).** Да намерим производната на линейната функция $f(x) = m\,x + b$. Както знаем, графиката на тази функция е права, неперпендикулярна на оста $Ox$, с ъглов коефициент $m$. Очевидно е, че правата има допирателна във всяка своя точка – допирателната е самата права $y = m\,x + b$. От теорема 5.1 веднага заключаваме, че линейната функция $f(x) = m\,x + b$ има производна във всяка точка $x$ и $m = f'(x)$ или, еквивалентно,

$$(m\,x + b)' = m. \quad (5.7)$$

До същия резултат (5.7) ще достигнем и ако приложим директно определението (5.5) за производна на функция, което предоставяме на читателя като просто упражнение.

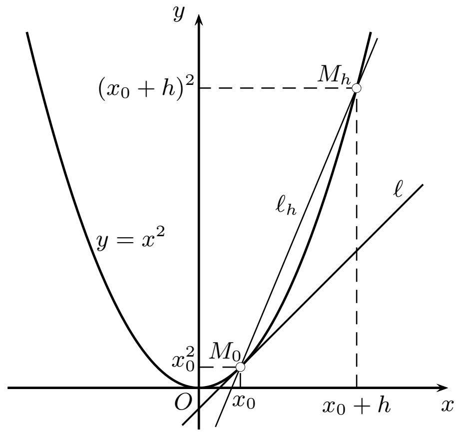
В частност, при $m = 0$ от (5.7) получаваме

$$(b)' = 0\,, \quad (5.8)$$

т. е. производната на постоянна (константна) функция $y = b$ е равна на нула, а при $b = 0$ и $m = 1$ намираме

$$(x)' = 1 \ . \tag{5.9}$$

**Пример 2 (Квадратна функция).** Да намерим уравнението на допирателната към графиката на квадратната функция $f(x) = x^2$ във фиксирана точка $M_0(x_0, f(x_0))$, вж. фиг. 2. За ъгловия коефициент $m_h$ на секущите, минаващи през точката $M_0$, получаваме:




Фиг. 2

$$\begin{aligned} m_h &= \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \\ &= \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} = 2x_0 + h \ . \end{aligned}$$

Тогава за ъгловия коефициент $m$ на търсената допирателна $\ell$ намираме

$$\begin{aligned} m = f'(x_0) &= \lim_{h\to 0} m_h \\ &= \lim_{h\to 0}(2x_0 + h) = 2x_0 \ . \end{aligned} \tag{5.10}$$

След заместване на $m$ и $f(x_0) = x_0^2$ в уравнение (5.2б) получаваме $y - x_0^2 = 2x_0\,(x - x_0)$ – уравнението на допирателната $\ell$ към графиката на квадратната функция $y = x^2$ в точката $M_0(x_0, x_0^2)$, което може да се преобразува до вида

$$y = x_0\,(2x - x_0).$$

В частност, при $x_0 = 3$ оттук получаваме $y = 3(2x-3)$ – уравнението на допирателната в точката $M_0(3,9)$, а при $x_0 = 0$ – уравнението $y = 0$, което означава, че абсцисната ос $Ox$ е допирателна в точката $O(0,0)$.

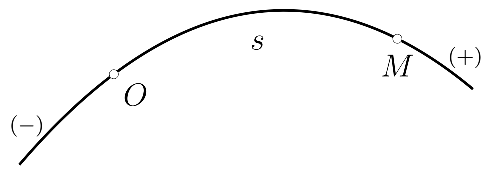
Тъй като $x_0$ е произволно фиксирано число, то от (5.10) следва, че за произволно $x$, $x \in (-\infty, +\infty)$, производната на квадратната функция $f(x) = x^2$ е $f'(x) = 2\,x$, т. е.

$$(x^2)' = 2\,x \ . \tag{5.11}$$

**Упражнение 5.1.** Да се намери уравнението на допирателната към графиката на кубичната функция $f(x) = x^3$ във фиксирана точка $M_0(x_0, f(x_0))$ и, в частност, в точките $M_0(2,8)$ и $O(0,0)$. Напишете съответната формула за $f'(x)$ при произволно $x \in (-\infty, +\infty)$.

## 5.4. Механичен смисъл на производната

Разглеждаме движение на точка $M$ по линия $L$. Върху линията фиксираме отправна точка $O$ и избираме положителна посока. Тогава положението на точката $M$ върху линията $L$ се определя от дъговата ѝ координата $s$, равна на дължината $\lambda_M$ на дъгата $\widehat{OM}$, ако точката $M$ се намира върху "положителната страна" на линията $L$, и на $-\lambda_M$, ако $M$ е върху "отрицателната страна" на $L$, вж. фиг. 3. Положението на точката $M$ във всеки момент от време $t$ се изразява чрез функция $s = f(t)$, наречена *закон на движение на точката.*




Фиг. 3

Да разгледаме движението на точката в интервала от време $[t_0, t]$. За този интервал, имащ дължина $\Delta t = t - t_0$ при $t > t_0$, дъговата координата $s$ на точката ще получи изменение $\Delta s = f(t) - f(t_0)$. Вижда се, че ако движението се извършва по положителната посока на линията $L$, то $\Delta s$ е дължината на пътя, изминат от точката за интервала $[t_0, t]$ Тогава частното $\Delta s / \Delta t$ има смисъл на "средния" път, изминат от точката за единица време.

**Определение 5.3**. *Величината*

$$v^*(t_0, t) = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \tag{5.12}$$

*се нарича* ***средна скорост на движение в интервала*** $[t_0, t]$.

В общия случай на движение средната скорост $v^*$ зависи и от двата момента $t_0$ и $t$. Ако $v^*$ не зависи от $t_0$ и $t$, когато $t_0$ и $t$ са произволни моменти от интервала $[t_1, t_2]$, то казваме, че *движението е равномерно* в този интервал. Интуитивно е ясно, че колкото интервалът от време $[t_0, t]$ е по-кратък (т. е. $\Delta t$ е по-малко), толкова по-добре движението може приближено да се разглежда като равномерно. Следователно границата на средната скорост $v^*$, когато $t$ клони към $t_0$, представлява скоростта на точката в "безкрайно малък интервал"[1] $[t_0, t_0 + \mathrm{d}t]$. Ето защо естествено е да дадем следното определение.

**Определение 5.4.** *Границата на средната скорост при $t$ клонящо към $t_0$,*

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} v^*(t_0, t) \tag{5.13а}$$

*или, еквивалентно,*

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}\,, \tag{5.13б}$$

*се нарича* ***скорост на движение в момента*** *$t_0$.*

Лесно забелязваме, че границата (6.13б) е *производната на функцията $f(t)$ в момента $t_0$*. Наистина, ако положим $x = x_0 + h$ и забележим, че $x \to x_0$ тогава и само тогава, когато $h \to 0$, според определението (5.5) имаме

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \\ &= \lim_{\hat{x} \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\,. \end{aligned} \tag{5.14}$$

Следвайки Сър Исаак Нютон (1642 – 1727), тук ще означим производната със символа $\dot{f}(t_0)$, т. е.

$$\dot{f}(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}\,. \tag{5.15}$$

Така достигнахме до следния извод:

> *Скоростта на движение $v(t)$ в произволен момент $t$ е равна на производната на пътя[2] $s = f(t)$ относно времето:*
>
> $$v(t) = \dot{f}(t)\,. \tag{5.16}$$

Много често в приложенията на математиката се среща понятието *скорост на изменение на дадена величина $y$ относно друга величина $x$*, за които е в сила някаква функционална зависимост $y = f(x)$. Например, може да се говори за скорост на изменение на температурата на въздуха относно времето $t$ или относно надморската височина $z$. *Средната скорост на изменение на $y$ относно $x$ в интервала* $[x_0, x]$ се дава със същата формула (5.12) при формалната смяна на $t_0$ и $t$ съответно с $x_0$ и $x$. *Скоростта на изменение на $y$ относно $x$ в точката $x = x_0$* представлява производната на функцията $f(x)$ в тази точка:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\,, \tag{5.17}$$

където използвахме по-общото означение $f'$ за производна, въведено от френския математик и механик Жозеф Луи Лагранж (1736 – 1813); означението $\dot{f}$ се използва почти само за случая, когато $x$ има физически смисъл на време.

---

[1] Символът $\mathrm{d}t$ тук означава въображаемо ненулево изменение на $t$, чиято абсолютна стойност $|\mathrm{d}t|$ е по-малка от всяко положително число.

[2] По-точно е да се каже производната на положението $s = f(t)$. Функцията $s = f(t)$ изразява изминатия от точката път само ако движението по линията $L$ е еднопосочно. На този частен случай се основава традиционната формулировка на твърдението (5.16), към която тук се придържаме.