17 Сходимост на числов ред. Степенни редове. Ред на Тейлър

17.1 Сходимост на числов ред. Геометричен ред

Нека $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ е произволна числова редица. На тази редица да съпоставим "безкрайната" сума

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \ . \tag{17.1}$$

Този формален израз се нарича *числов ред.* Членовете $a_0, a_1, a_2, \ldots$ на числовата редица се наричат *членове на реда* (17.1). Законът, по който на всеки номер n съпоставяме члена a_n се нарича *общ член на реда.* Най-често този закон се задава с аналитичен израз, т. е. с аналитично зададена функция $a_n = f(n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Пример 1. (*Геометричен ред*) Да разгледаме реда, съставен от членовете на безкрайната геометрична прогресия $1, q, q^2, q^3, \ldots, q^n, \ldots$, т. е. реда

$$1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \ , \tag{17.2}$$

където q е произволно дадено число. Този числов ред се среща често в приложенията и се нарича *геометричен ред.* Лесно можем да намерим сумата S_n от първите му $n+1$ члена:

$$S_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n \ .$$

Наистина, умножавайки това равенство с частното q, получаваме

$$q\, S_n = q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n + q^{n+1} \ .$$

След почленно изваждане на второто равенство от първото, намираме

$$(1-q)\, S_n = 1 - q^{n+1} \ ,$$

т. е.

$$S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \qquad \text{при} \qquad q \neq 1 \ . \tag{17.3}$$

За да дадем разумен смисъл на формалния израз (17.2), най-естествено е да разгледаме поведението на крайните суми S_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, когато n расте неограничено.

Да се върнем сега към общия ред (17.1). Крайните суми

$$\left.\begin{array}{l} S_0 = a_0, \\ S_1 = a_0 + a_1, \\ S_2 = a_0 + a_1 + a_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ S_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \tag{17.4}$$

се наричат *частични* (или *парциални*) *суми на реда* (17.1). Те образуват числовата редица

$$S_0, S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots \ . \tag{17.5}$$

Определение. *Числовият ред (17.1) се нарича сходящ, ако редицата от парциалните му суми (17.5) е сходяща. Тогава нейната граница S се нарича сума на реда: $S = \lim\limits_{n=\to\infty} S_n$, и означаваме*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S \ . \tag{17.6}$$

Ако редицата от парциалните му суми (17.5) е разходяща, то редът се нарича разходящ.

Пример 2. (*Изследване за сходимост на геометричния ред*) Да запишем формула (17.3) за парциалните суми на геометричния ред във вида

$$S_n = \frac{1}{1-q} - \frac{q}{1-q}\, q^n \ . \tag{17.7}$$

Ясно е, че поведението на S_n при $n \to \infty$ се определя от поведението на q^n. Ако $0 \le q < 1$, имаме $q^n \to 0$ при $n \to \infty$. (Да си спомним, че показателната функция $a^x \to 0$ при $x \to +\infty$, ако $0 < a < 1$.) Но тогава $q^n = \big(-(-q)\big)^n = (-1)^n(-q)^n \to 0$ и при $-1 < q < 0$, тъй като тогава $0 < -q < 1$. Следователно

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-q} - \frac{q}{1-q} \lim_{n\to\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

щом $|q| < 1$, т. е. геометричният ред е сходящ и има сума

$$S = \frac{1}{1-q} \qquad \text{при} \qquad |q| < 1 \ . \tag{17.8}$$

Да разгледаме сега случая, когато $q > 1$. Тъй като тогава $q^n \to +\infty$ при $n \to \infty$ (показателната функция $a^x \to +\infty$ при $x \to +\infty$, ако $a > 1$), то от (17.7) следва, че

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-q} - \frac{q}{1-q} \lim_{n\to\infty} q^n = +\infty \ .$$

Следователно редицата от парциални суми S_n е разходяща, т. е. геометричният ред е разходящ при $q > 1$. В случая, когато за един числов ред $S_n \to +\infty$ (или $-\infty$) при $n \to \infty$, на този ред се преписва символа $+\infty$ (или $-\infty$). Например, за геометричния ред означаваме

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = +\infty \qquad \text{при} \qquad q > 1 \ . \tag{17.9}$$

При $q < -1$ числовата редица с общ член q^n $(n = 0, 1, 2, \dots)$ има поведението, например, на редицата

$$1, -2, 4, -8, 16, -32, \dots \ ,$$

получаваща се при частния случай $q = -2$. Вижда се, че членовете на тази редица растат неограничено по абсолютна стойност при $n \to \infty$, т. е. $|q|^n \to +\infty$, но с алтернативно сменяне на знака им. (За такива редици се казва, че клонят (дивергират) към ∞, но без знак.) Тъй като редицата q^n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ е разходяща при $q < -1$, то от представянето (17.7) заключаваме, че редицата от парциални суми S_n е също разходяща, т. е. геометричният ред е разходящ в този случай.

Остана да разгледаме само двата случая $q = 1$ и $q = -1$, т. е. когато $|q| = 1$. При $q = 1$ геометричният ред има вида

$$1 + 1 + 1 + \cdots + 1 + \cdots \ .$$

Тогава $S_n = (n + 1).1 = n + 1$. Тъй като $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$, то редът е разходящ при $q = 1$ (по-точно $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 1^n = +\infty$).

При $q = -1$ геометричният ред има вида

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \ .$$

За парциалните суми на този ред получаваме

$$S_0 = 1, \quad S_1 = 1 - 1 = 0, \quad S_2 = 1 - 1 + 1 = 1, \quad S_3 = 1 - 1 + 1 - 1 = 0, \ \ldots \ .$$

Но редицата $1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$ няма граница, т. е. тя е разходяща. Следователно геометричният ред е разходящ при $q = -1$.

Да резюмираме резултатите от проведеното изследване по следния начин:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \begin{cases} = \dfrac{1}{1-q} \text{ при } |q| < 1 \text{ (сходящ ред)} \\ \text{разходящ при } |q| \geq 1\,; \text{ при това } \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} q^n = +\infty \text{ при } q \geq 1. \end{cases} \tag{17.10}$$

Да се върнем накрая отново към определението за сума S на един сходящ числов ред:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \ . \tag{17.11}$$

От определението за граница на числова редица следва, че стойностите на S_n могат да станат толкова близки до S, колкото желаем, стига да изберем n да бъде достатъчно голямо. По-точно, абсолютната грешка $|S_n - S|$ при приближаването на S с нейна парциална сума S_n става по-малка от произволно избрано положително число ε за всички номера n, по-големи от някакъв номер N_ε. Следователно можем да очакваме, че при "срязване" на реда все по-далеч от първия му член ще получаваме все по-добри приближения (апроксимации) S_n за сумата S.

17.2 Степенни редове

Да допуснем сега, че частното q на геометричния ред (17.2) се изменя в интервала $(-\infty, +\infty)$. Тогава по-естествено е да означим q с x, т. е. да записваме реда (17.2) така :

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \ . \tag{17.12}$$

Вижда се, че редът (17.12) е частен случай на по-общия ред

$$a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + \cdots + a_n\, x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n \ , \tag{17.13}$$

където $a_0, a_1, a_2, \dots$ са дадени числа. Ред от вида (17.13) се нарича *степенен ред*, а числата $a_0, a_1, a_2, \dots$ – *коефициенти* на този ред.

Понякога се разглеждат степенни редове от по-общия вид

$$a_0 + a_1\,(x - x_0) + a_2\,(x - x_0)^2 + \cdots + a_n\,(x - x_0)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x - x_0)^n\ , \tag{17.14}$$

където x_0 е фиксирано число. Тези редове, обаче, се привеждат към редове от вида (17.13), като положим $x - x_0 = y$. Ето защо тук ще се занимаваме само с редове от вида (17.13).

Давайки на x различни конкретни стойности, ще получаваме различни числови редове, които могат да се окажат сходящи или разходящи. Множеството от всички стойности на x, за които редът (17.13) се превръща в сходящ числов ред, се нарича *област на сходимост* на този ред.

Парциалните суми S_n на степенния ред (17.13) са полиноми от степен n относно x:

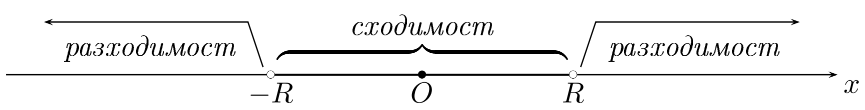
$$S_n = a_0 + a_1\,x + \cdots + a_n\,x^n. \tag{17.15}$$

Тъй като те са функции на x, то сумата S на степенния ред, е също функция на x, дефинирана в областта на сходимост на реда: $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\,x^n$. Лесно се вижда, че точката $x = 0$ принадлежи на областта на сходимост на всеки степенен ред от вида (17.13); при това $S(0) = a_0$. Всеки един от полиномите $S_n = S_n(x)$ е приближение (апроксимация) за функцията $S(x)$.

Пример 3. Съгласно (17.10) областта на сходимост на геометричния ред (17.12) е интервалът $(-1, 1)$. В този интервал той има сума $S(x) = \dfrac{1}{1-x}$. Това означава, че функцията $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ се представя (разлага или развива) в степенен ред в този интервал, т. е.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots \quad \text{при} \quad x \in (-1, 1)\ . \tag{17.16}$$

Аналогично на геометричния ред (17.12), оказва се, че за всеки степенен ред (17.13) съществува интервал $(-R, R)$, в който той е сходящ, а в интервалите $(-\infty, -R)$ и $(R, +\infty)$ – разходящ,



Фиг. 17.1

вж. фиг. 17.1. Интервалът $(-R, R)$ се нарича *интервал на сходимост*, а неотрицателното число R – *радиус на сходимост* на степенния ред. При това, ако редът е сходящ само за $x = 0$, то счита се, че $R = 0$, а ако редът е сходящ за всяко x, приема се $R = +\infty$. Ще отбележим, че при $R \neq 0$ и $R \neq +\infty$ има степенни редове, които са сходящи за $x = -R$ или $x = R$, но има и такива, които са разходящи за тези стойности на x. Например, интервалът на сходимост на геометричния ред (17.12) е $(-1, 1)$, така че $R = 1$. Същият ред е разходящ за $x = -1$ и $x = 1$.

Ще посочим някои свойства на степенните редове.

Свойство 1. Сумата $S(x)$ на степенния ред (2.2) е непрекъсната функция в интервала на сходимост $(-R, R)$ на реда.

Свойство 2. Степенният ред (17.13) може почленно да се диференцира в интервала му на сходимост $(-R, R)$, т. е. за всяко $x \in (-R, R)$ е в сила равенството

$$S'(x) = a_1 + 2a_2\,x + 3a_3\,x^2 + \cdots + na_n\,x^{n-1} + \cdots \ . \tag{17.17}$$

При това редът в (17.17) има същия радиус на сходимост R, както и редът (17.13).

Свойство 3. Степенният ред (3.3) може почленно да се интегрира във всеки интервал $[0, x]$, където $x \in (-R, R)$, т. е. в сила е равенството

$$\left.\begin{aligned} \int_0^x S(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^x a_0\,\mathrm{d}t + \int_0^x a_1\,t\,\mathrm{d}t + \int_0^x a_2\,t^2\,\mathrm{d}t + \cdots + \int_0^x a_n\,t^n\,\mathrm{d}t + \cdots \\ &= a_0\,x + \frac{1}{2}a_1\,x + \frac{1}{3}a_2\,x^3 + \cdots + \frac{1}{n+1}a_n\,x^{n+1} + \cdots \end{aligned}\right\} \tag{17.18}$$

При това редът в (17.18) има същия радиус на сходимост R, както и редът (17.13).

Да предположим, че една функция $f(x)$ е сума на даден степенен ред в интервала му на сходимост $(-R, R)$. Позовавайки се на последните две свойства на степенните редове, можем да намерим представянията (разлаганията или развитията) в степенни редове и на други функции.

Пример 4. Да диференцираме почленно представянето (17.16). Тогава ще получим представянето

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2\,x + 3\,x^2 + \cdots + n\,x^{n-1} + \cdots \quad \text{при} \quad x \in (-1, 1)\ .$$

Съгласно свойство 2 радиусът на сходимост на последния ред е също равен на единица.

Пример 5. (*Развитие в степенен ред на функцията* $f(x) = \ln(1+x)$) Забелязваме, че производната на дадената функция е $f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$. Но разлагането на $f'(t)$ в степенен ред се получава от (17.16) чрез простата субституция $x = -t$:

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + t^4 - t^5 + \cdots \ . \tag{17.19}$$

Тъй като $|x| = |t|$, то последното представяне е в сила само при $t \in (-1, 1)$. След почленно интегриране на (17.19) в интервала $[0, x]$, където $x \in (-1, 1)$, получаваме

$$\int_0^x \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = \ln(1+t)\Big|_0^x = t\Big|_0^x - \frac{t^2}{2}\Big|_0^x + \frac{t^3}{3}\Big|_0^x - \frac{t^4}{4}\Big|_0^x + \frac{t^5}{5}\Big|_0^x - \frac{t^6}{6}\Big|_0^x + \cdots \ ,$$

т. е. за всяко $x \in (-1, 1)$ е в сила представянето

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \cdots \ . \tag{17.20}$$

Да отбележим, че за $x = -1$ функцията $\ln(1+x)$ не е дефинирана. Ако положим $x = -1$ в дясната страна на (17.20), ще получим реда

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots \tag{17.21}$$

(взет със знак минус), който се нарича *хармоничен ред.* Доказва се, че той е разходящ числов ред.

Ако пък в представянето (17.20) положим $x = 1$, ще достигнем до равенството

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots \tag{17.22}$$

Числовият ред от дясната страна на (17.22) се нарича *алтернативен хармоничен ред.* Може да се докаже, че този ред е сходящ и равенството (17.22) е вярно. Следователно представянето (17.20) е в сила за всяко x от интервала $(-1.1]$ – областта на сходимост на реда от дясната му страна.

Пример 6. (*Развитие в степенен ред на функцията* $f(x) = \arctan x$) Производната на дадената функция е $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. За да получим разлагане в степенен ред на последната функция, в представянето (17.16) да положим $x = -t^2$:

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots \ . \tag{17.23}$$

Тъй като $|x| = |t^2| = |t|^2$, то $|x| < 1$ тогава и само тогава, когато $|t| < 1$, т. е. представянето (17.23) е в сила само при $t \in (-1, 1)$. След почленно интегриране на (17.23) в интервала $[0, x]$, където $x \in (-1, 1)$, получаваме

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \arctan t\Big|_0^x = t\Big|_0^x - \frac{t^3}{3}\Big|_0^x + \frac{t^5}{5}\Big|_0^x - \frac{t^7}{7}\Big|_0^x + \cdots$$

или, еквивалентно,

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \tag{17.24}$$

при $x \in (-1, 1)$. Може да се докаже. че последното представяне е в сила и при $x = -1$ и $x = 1$. Полагайки $x = 1$ в (17.24) и отчитайки, че $\arctan 1 = \dfrac{\pi}{4}$, достигаме до следното представяне на числото π:

$$\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\right) \ . \tag{17.25}$$

17.3 Ред на Тейлър

Да предположим, че в интервала $(a - R, a + R)$ функцията $f(x)$ се разлага в степенния ред

$$f(x) = a_0 + a_1\,(x - x_0) + a_2\,(x - x_0)^2 + a_3\,(x - x_0)^3 + a_4\,(x - x_0)^4 + \cdots \ . \tag{17.26}$$

Според свойство 2 това представяне може да се диференцира произволен брой пъти в интервала $(a - R, a + R)$. Диференцирайки го последователно, получаваме

$$\left.\begin{aligned} f'(x) &= a_1 + 2\,a_2\,(x - x_0) + 3\,a_3\,(x - x_0)^2 + 4\,a_4\,(x - x_0)^3 + \cdots \ , \\ f''(x) &= 2\,a_2 + 3.2\,a_3\,(x - x_0) + 4.3\,a_4\,(x - x_0)^2 + \cdots \ , \\ f'''(x) &= 3.2\,a_3 + 4.3.2\,a_4\,(x - x_0) + \cdots \ , \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{17.27}$$

Да положим $x = x_0$ в представянията (17.26) и (17.27). Тогава те се редуцират до равенствата

$$f(x_0) = a_0, \quad f'(x_0) = a_1 = 1!\, a_1, \quad f''(x_0) = 2\, a_2 = 2!\, a_2, \quad f'''(x_0) = 3.2\, a_3 = 3!\, a_3, \quad \dots ,$$

т. е. $f^{(k)}(x_0) = k!\, a_k$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Оттук веднага намираме

$$a_0 = f(x_0), \quad a_1 = \frac{f'(x_0)}{1!}, \quad a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}, \quad a_3 = \frac{f'''(x_0)}{3!}, \quad \dots, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \quad \dots . \tag{17.28}$$

Следователно, *ако една функция $f(x)$ се разлага в степенния ред (17.26) в интервала $(a - R, a + R)$, то тя има производни от произволен ред в този интервал и коефициентите на този ред се определят по формулите (17.28), т. е. редът (17.26) има вида*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots . \tag{17.29}$$

Тъй като коефициентите на този ред се изразяват само чрез стойностите на $f(x)$ и нейните производни в точката $x = x_0$, то можем да направим извода, че *поведението на функцията в целия интервал $(a - R, a + R)$ се определя от поведението ѝ в "безкрайно малка околност" на точката $x = x_0$*. Ако една функция се представя в степенен ред в интервала $(a - R, a + R)$, тя се нарича *аналитична* в този интервал.

Ясно е, че за всяка функция $f(x)$, имаща производни от произволен ред в точката $x = x_0$, може да се състави реда

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots . \tag{17.30}$$

Този ред се нарича *ред на Тейлър за функцията $f(x)$ в точката $x = x_0$*. В частния случай, когато $x_0 = 0$, този ред се нарича *ред на Маклорен*. Оказва се, обаче, че редът на Тейлър може да не сходящ във всяка точка x, в която $f(x)$ има производни от произволен ред или, ако е сходящ в някакъв интервал $(a - R, a + R)$, сумата му може да не е равна на $f(x)$ в този интервал. Тук няма да обсъждаме въпроса кога една функция $f(x)$ може да се представи чрез своя ред на Тейлър (17.30) в някакъв интервал $(a - R, a + R)$. Ще получим само, чисто формално, редовете на Тейлър за някои основни елементарни функции.

Пример 7. (*Развитие в степенен ред на функцията $f(x) = e^x$*) При диференциране функцията $f(x) = e^x$ се запазва: $f^{(k)}(x) = e^x$, $k = 0, 1, 2, \dots$, за всяко $x \in (-\infty, +\infty)$. Следователно $f^{(k)}(0) = 1$ при $k = 0, 1, 2, \dots$. Оказва се, че в целия интервал $(-\infty, +\infty)$ функцията $f(x) = e^x$ се представя със своя ред на Маклорен (17.30):

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \cdots , \tag{17.31}$$

т. е. тя е аналитична функция върху цялата числова ос.

Пример 8. (*Развития в степенен ред на функциите $f(x) = \sin x$ и $f'(x) = \cos x$*) За производните на функцията $f(x) = \sin x$ получаваме

$$f'(x) = \cos x, \quad f''(x) = -\sin x, \quad f'''(x) = -\cos x, \quad f^{(4)}(x) = \sin x, \quad f^{(5)}(x) = \cos x, \quad \dots$$

за всяко $x \in (-\infty, +\infty)$. В частност, в точката $x = 0$ имаме

$$f(0) = 0, \quad f'(x) = 1, \quad f''(x) = 0, \quad f'''(x) = -1, \quad f^{(4)}(x) = 0, \quad f^{(5)}(x) = 1, \quad \dots$$

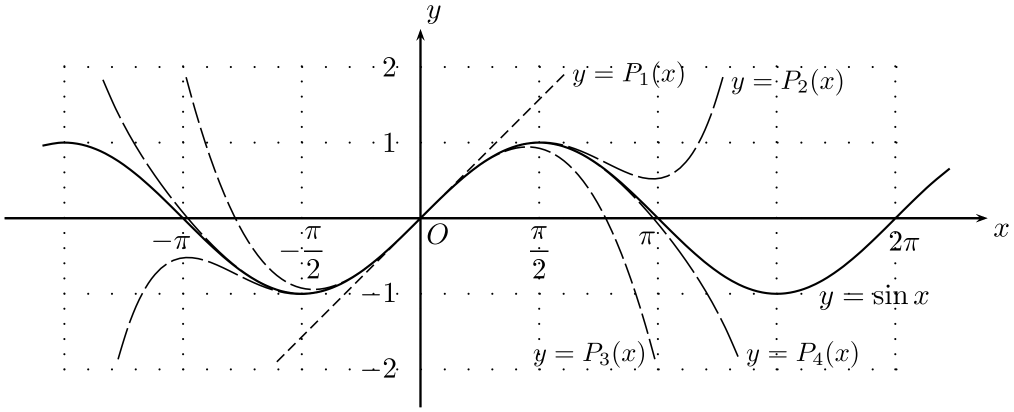
Оказва се, че и функцията $f(x) = \sin x$ се представя със своя ред на Тейлър (17.30) в целия интервал $(-\infty, +\infty)$:

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \ , \tag{17.32}$$

т. е. тя също е аналитична функция върху цялата числова ос. На фиг. 17.2 е са показани графиките на функцията $f(x) = \sin x$ и първите ѝ четири приближения (апроксимации)

$$P_1(x) = x, \quad P_2(x) = x - \frac{x^3}{6}, \quad P_3(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \text{ и } P_4(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040}, \tag{17.33}$$

които се получават чрез съответни срязвания на реда (17.32).



Фиг. 17.2

По напълно аналогичен начин може да се достигне до разлагане в степенен ред на функцията $g(x) = f'(x) = \cos x$. До това разлагане, обаче, може да достигнем по-лесно чрез почленно диференциране на представянето (17.32):

$$\cos x = \frac{1}{1!} - \frac{3\,x^2}{3!} + \frac{5\,x^4}{5!} - \frac{7\,x^6}{7!} + \cdots \ ,$$

т. е.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \ , \tag{17.34}$$

Съгласно свойство 2 това представяне е в сила в целия интервал $(-\infty, +\infty)$, т. е. $f'(x) = \cos x$ е аналитична функция върху цялата числова ос.