5. Частни производни и диференциали от по-висок ред. Локален екстремум на функция на две променливи

5.1. Частни производни от по-висок ред. Да предположим, че функцията $u = f(M) = f(x_1, \ldots, x_n)$ има частна производна $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ относно аргумента си x_i в околност на точката M_0, т.е. във всяка точка M от някаква околност на M_0. Тогава тази частна производна е също функция на променливите $x_1, \ldots, x_n$, дефинирана в тази околност. Ако се окаже, че тази функция $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n)$ има частна производна относно променливата си x_j в точката M_0, тя се нарича ***втора производна*** или ***частна производна от втори ред*** на функцията $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ в тази точка относно променливите си x_i и x_j (първо по x_i, а след това по x_j) и се означава с $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, т.е.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(M_0) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(M_0)\ . \tag{1}$$

Използват се също и означенията $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}$, $f''_{x_i x_j}$ и $u''_{x_i x_j}$. Ако двете променливи са различни, т.е. $j \neq i$, производната $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ се нарича ***смесена частна производна***. Ако пък $j = i$, тази производна се означава с $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ или $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$, или пък $f''_{x_i^2}$ или $u''_{x_i^2}$, и се нарича втора частна производна относно аргумента x_i.

Можем да продължим и по-нататък. Ако се окаже, че втората частна производна $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ съществува в околност на точката M_0 и тази частна производна има частна производна по аргумента си x_k, можем да дефинираме трета частна производна (или частна производна от трети ред) в тази точка чрез равенството

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i}(M_0) = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\right)(M_0). \tag{2}$$

Ако поне две от променливите x_i, x_j и x_k са различни, тази производна се нарича смесена частна производна от трети ред. По аналогичен начин се дефинират частни производни от четвърти, пети и т.н. ред. Понякога частните производни $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}$ се наричат частни производни от първи ред.

Да разгледаме по-подробно случая на функция $z = f(x, y)$ на две променливи. При диференцирането на първата частна производна $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ по променливите x и y получаваме две втори частни производни:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \quad \left[f''_{x^2} = (f'_x)'_x\right], \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \quad \left[f''_{xy} = (f'_x)'_y\right], \tag{3}$$

а при диференцирането на частната производна $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ – още две производни:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \quad \left[f''_{yx} = \left(f'_y\right)'_x\right], \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \quad \left[f''_{y^2} = \left(f'_y\right)'_y\right]. \tag{4}$$

(В квадратни скоби са дадени определенията за тези частни производни чрез използване на алтернативни означения. Да обърнем внимание на реда на променливите при двата вида означения за смесените частни производни.) Ако сега диференцираме частните производни от втори ред по аргументите им x и y, ще получим общо 8 частни производни от трети ред ($8 = 2.2^2 = 2^3$), и т.н.

Пример 1 . *Да намерим частните производни до втори ред включително на функцията $f(x,y) = e^{3x}\cos 2y$ в произволна точка $M(x,y)$ от дефиниционната ѝ област.*

▼ Функцията е дефинирана в цялата равнина, т.е. $D_f = \mathbb{R}^2$. За частните ѝ производни от първи ред имаме

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{3x}\right)\cos 2y = 3e^{3x}\cos 2y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(M) = e^{3x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}(\cos 2y) = -2e^{3x}\sin 2y,$$

откъдето по формулите (3) и (4) в произволна точка $M(x,y)$ намираме

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(3e^{3x}\cos 2y\right) = 9\,e^{3x}\cos 2y, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(3e^{3x}\cos 2y\right) = \underline{-6\,e^{3x}\sin 2y},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-2e^{3x}\sin 2y\right) = \underline{-6\,e^{3x}\sin 2y}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-2e^{3x}\sin 2y\right) = -4\,e^{3x}\cos 2y,$$

Забелязваме, че в горния пример смесените частни производни от втори ред са равни: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, т.е. тези частни производни *не зависят от реда на диференциране*. Примери на функции показват, че това невинаги е така. В сила е следната теорема, даваща достатъчно условие за равенство на вторите смесени частни производни на функция на две променливи.

Теорема 1. *Ако смесените частни производни $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$ и $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$ на функцията $z = f(x,y)$ съществуват в околност на точката $M_0(x_0,y_0)$ и са непрекъснати в M_0, то в тази точка те са равни :*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(M_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M_0). \tag{5}$$

Да отбележим, че за широк клас от функции не е необходимо да пресмятаме смесените частни производни в околност на дадена точка, за да проверяваме дали е изпълнено условието на теорема 1, т.е. дали те са непрекъснати в тази точка.

Например, ако една функция е елементарна, то всички нейни частни производни са също елементарни функции, за които знаем, че са непрекъснати във всички точки, в които те са дефинирани. Такава е например функцията $f(x,y) = e^{3x}\cos 2y$ от пример 1.

5.2. Диференциали от по-висок ред. Ако функцията $z = f(x,y)$ е диференцируема във всяка точка $M(x,y)$ от някаква околност на точката $M_0(x,y)$, то нейният диференциал

$$\mathrm{d}f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\mathrm{d}y \tag{6}$$

е функция на x и y, дефинирана в тази околност. Той зависи също и от $\mathrm{d}x$ и $\mathrm{d}y$. Ако сега предположим, че функцията $f(x,y)$ има частни производни от втори ред в околност на точката M_0, които да са непрекъснати в тази точка, то частните производни от първи ред $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ са диференцируеми функции в точката M_0. Ето защо тогава можем да разглеждаме диференциалите на тези частни производни, а следователно и диференциала на диференциала $\mathrm{d}f$ в тази точка, при условие, че диференциалите $\mathrm{d}x$ и $\mathrm{d}y$ на независимите променливи се разглеждат като постоянни множители. Означавайки сега този диференциал и произтичащите от намирането му диференциали на независимите променливи x и y със символа δ, получаваме последователно

$$\begin{aligned}
\delta\left(\mathrm{d}f\right)(M_0) &= \delta\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\mathrm{d}x + \delta\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}x \\
&= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\delta x + \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\delta y\right)\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\delta x + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\delta y\right)\mathrm{d}y \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\delta x\mathrm{d}x + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(\delta y\mathrm{d}x + \delta x\mathrm{d}y\right) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\delta y\mathrm{d}y\ ,
\end{aligned}$$

където накрая се позовахме на равенството на смесените частни производни, произтичащо от предположението за непрекъснатост на вторите частни производни на функцията f в точката M_0 и теорема 1. (Всички частни производни по-горе взехме в тази точка.) Ако сега приемем, че новите диференциали δx и δy са равни на съответните диференциали $\mathrm{d}x$ и $\mathrm{d}y$: $\delta x = \mathrm{d}x$ и $\delta y = \mathrm{d}y$, ще получим следната квадратична форма на $\mathrm{d}x$ и $\mathrm{d}y$:

$$\mathrm{d}^2 f(M_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_0)\mathrm{d}x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(M_0)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M_0)\mathrm{d}y^2\ , \tag{7}$$

където приехме означенията $\mathrm{d}x^2 = (\mathrm{d}x)^2$, $\mathrm{d}y^2 = (\mathrm{d}y)^2$ и $\mathrm{d}^2 f = \delta(\mathrm{d}f)$.

Определение 1. *Диференциалът $\delta(\mathrm{d}f)$ на първия диференциал $\mathrm{d}f$ на функцията $z = f(x,y)$ в точката M_0, разглеждан при $\delta x = \mathrm{d}x$ и $\delta y = \mathrm{d}y$, се нарича* ***вто-***

ри диференциал *на функцията* f *в тази точка и се означава с* $\mathrm{d}^2 f$ *или* $\mathrm{d}^2 z$.

Както вече показахме, вторият диференциал $\mathrm{d}^2 f$ има вида (7).

По аналогичен начин се дефинира трети диференциал $\mathrm{d}^3 f$ и т.н. Въобще, ако $(k-1)$-вият диференциал $\mathrm{d}^{k-1} f$ е вече дефиниран, то k-тият диференциал (или диференциалът от k-ти ред) $\mathrm{d}^k f$ се дефинира като диференциала на $(k-1)$-вия диференциал:

$$\mathrm{d}^k f = \delta\left(\mathrm{d}^{k-1} f\right) \quad \text{при} \quad \delta x = \mathrm{d}x \ \text{ и } \ \delta y = \mathrm{d}y. \tag{8}$$

За да може това да стане, е достатъчно да предположим, че частните производни от k-ти ред на функцията f съществуват в околност на разглежданата точка M_0, в която дефинираме $\mathrm{d}^k f$, и са непрекъснати в тази точка. Това предположение гарантира диференцируемост на всички частни производни от $(k-1)$-ви ред на функцията. Освен това, тогава всички смесени частни производни от k-ти ред няма да зависят от реда на диференциране.

Забелязваме, че изразът (7) за втория диференциал $\mathrm{d}^2 f$ прилича на формулата $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ за повдигане на двучлена $a+b$ на квадрат. Това ни подсказва, че ако запишем символично диференциала $\mathrm{d}f$ (наричан още първи диференциал) във вида

$$\mathrm{d}f = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{d}y\right) f \ , \tag{9}$$

изнасяйки формално f извън скоби (вж. израза му (6)), и въведем следните правила за "умножение":

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \quad \text{и} \quad \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \ ,$$

то вторият диференциал $\mathrm{d}^2 f$ може символично да се запише по аналогичен начин:

$$\mathrm{d}^2 f = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{d}y\right)^{(2)} f \ , \tag{10}$$

(С цел да подчертаем символичния характер на това равенство тук записахме степенния показател в скоби, но това може да не се прави.)

Оказва се, че следващите диференциали от по-висок ред, макар да имат значително по-сложен вид, могат също символично да се запишат във вида

$$\mathrm{d}^k f = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{d}y\right)^{(k)} f, \quad k = 1, 2, 3, \dots \ . \tag{11}$$

За да запишем израза за k-тия диференциал $\mathrm{d}^k f$, трябва просто да си спомним формулата за нютоновия бином:

$$(a+b)^k = \sum_{j=0}^{k} C_k^j a^{k-j} b^j, \quad \text{където} \quad C_k^j = \binom{k}{j} = \frac{k!}{j!(k-j)!}$$

са биномните коефициенти. Например за третия диференциал $\mathrm{d}^3 f$ имаме

$$\mathrm{d}^3 f = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\mathrm{d}x^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}\mathrm{d}x^2\mathrm{d}y + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\mathrm{d}y^3 \ . \tag{12}$$

По напълно аналогичен начин се въвеждат диференциали от по-висок ред на функция $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на n променливи. Нейният k-ти диференциал $\mathrm{d}^k f$ може да се запише в аналогичната символична форма

$$\mathrm{d}^k f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n\right)^{(k)} f, \quad k = 1, 2, 3, \ldots \ . \tag{13}$$

Например вторият диференциал $\mathrm{d}^2 f$ е симетрична квадратична форма на диференциалите $\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \ldots, \mathrm{d}x_n$ на независимите променливи:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\mathrm{d}x_1^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\mathrm{d}x_2^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_3 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3 \\ + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}\mathrm{d}x_3^2 + \cdots + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_{n-1} \partial x_n}\mathrm{d}x_{n-1}\mathrm{d}x_n + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}\mathrm{d}x_n^2 \ ,\end{aligned}$$

т.е.

$$\mathrm{d}^2 f = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j, \quad \text{където} \quad a_{ij} = a_{ji} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \ . \tag{14}$$

5.3. Локален екстремум на функция на няколко променливи.

6.1.1. Определение и необходими условия за локален екстремум. Нека функцията

$$u = f(M) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

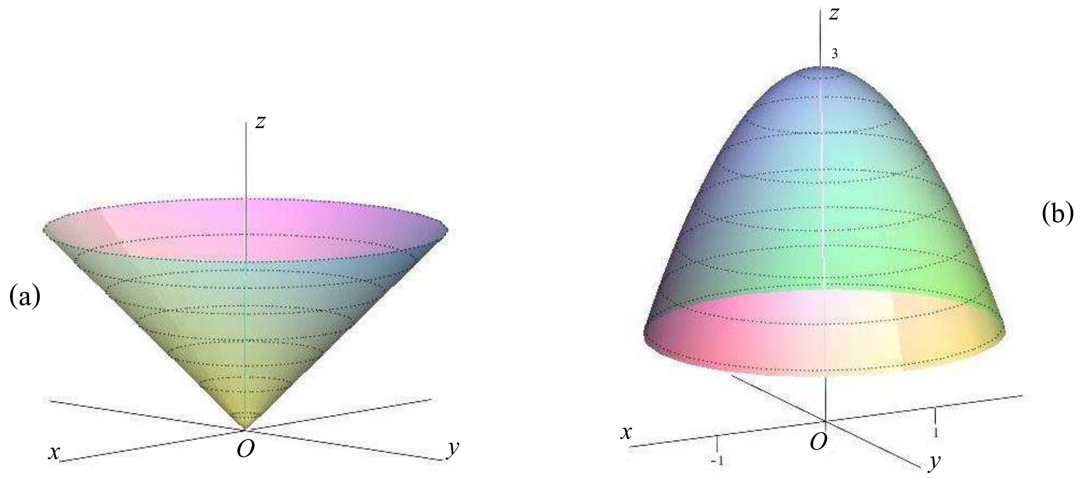
е дефинирана в множеството $D \subset \mathbb{R}^n$ и $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ е точка от D.

Определение. *Казваме, че функцията $u = f(M)$ има **локален минимум (максимум)** в точката M_0, ако съществува такава околност $\mathcal{U}(M_0)$ на точката M_0, че за всяка точка $M \in \mathcal{U}(M_0) \cap D$ е в сила неравенството*

$$f(M) \geq f(M_0) \quad (\ f(M) \leq f(M_0)\ )\ .$$

Ако последните равенства са строги при $M \neq M_0$, казваме, че функцията $u = f(M)$

*има **строг** локален минимум (максимум) в точката M_0.*



Фиг. 5.1. (a) Графиката на функцията $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ е конус. Функцията има локален минимум в координатното начало $O(0,0)$, който е равен на 0. (b) Графиката на функцията $f(x,y) = 3 - x^2 + y^2$ е ротационен параболоид. Функцията има локален максимум в началото $O(0,0)$, който е равен на 3.

Ако функцията има локален максимум или локален минимум в точката M_0, казваме, че тя има *локален екстремум* в тази точка. Примери за функции, имащи локални екстремуми са дадени на фиг. 5.1. По-нататък, за да можем да приложим апарата на диференциалното смятане, ще предполагаме, че точките на локален екстремум са вътрешни точки на дефиниционната област D на функцията.

Теорема 1. *Ако функцията $u = f(M) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ има в точката M_0 локален екстремум и в тази точка съществува частната производна относно променливата x_k, то $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(M_0) = 0$.*

Следствие. *Ако функцията $u = f(M) = f(x_1, \ldots, x_n)$ има в точката M_0 локален екстремум и е диференцируема в тази точка, то първият диференциал на функцията в точката M_0 се анулира:*

$$\mathrm{d}u(M_0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0)\,\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(M_0)\,\mathrm{d}x_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(M_0)\,\mathrm{d}x_n = 0 \tag{15}$$

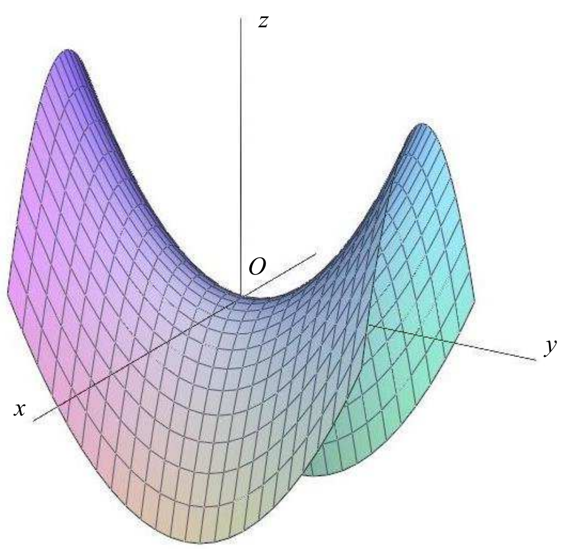
за произволни стойности на диференциалите $\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_n$ на независимите променливи.

Доказателство. Наистина, щом функцията $u = f(M)$ е диференцируема в точката M_0, то тя има всички свои частни производни $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, в тази точка. Но тогава според теорема 1 те се анулират, т. е.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0) = 0,\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(M_0) = 0, \ldots,\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(M_0) = 0\,. \tag{16}$$

От израза за първия диференциал на функцията $u = f(M)$ веднага заключаваме, че системата уравнения (16) е еквивалентна на равенството (15). ◄

Точките, в които първият диференциал е равен на нула, се наричат *стационарни точки.* За намирането им е необходимо да се реши системата уравнения (16) относно координатите им $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$. Следва да подчертаем, че равенствата (16) са само необходими, но не и достатъчни условия за локален екстремум (даже и в случая на функция на една променлива). Например точката $O(0,0)$ е стационарна за функцията $f(x,y) = y^2 - x^2$, но тя не е точка на локален екстремум, тъй като $f(0,0) = 0$, а в произволно малка околност на тази точка функцията приема както строго положителни, така и строго отрицателни стойности, вж. фиг. 5.2. Точките от графиката на една диференцируема функция $z = f(x,y)$, които съответстват на стационарни точки, в които функцията няма локален екстремум, се наричат *седлови точки* на повърхнината $z = f(x,y)$.



Фиг. 5.2. Координатното начало $O(0,0)$ на равнината Oxy е стационарна точка за функцията $f(x,y) = y^2 - x^2$, но в тази точка функцията няма локален екстремум. Точката $O(0,0,0)$ в пространството $Oxyz$ е седлова точка на повърхнината $z = y^2 - x^2$.

Ще отбележим също, че една функция може да има локален екстремум в една точка, но в тази точка тя да няма първи частни производни. Такава е, например, функцията $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, чиято графика е показана на фиг. 5.1(a). Тази функция има локален минимум в координатното начало $O(0,0)$, но в тази точка не съществува никоя от първите ѝ частни производни. (Проверете !). Стационарните точки и точките, в които една функция не е диференцируема, се наричат *критични* точки или точки на възможен екстремум.

Всяка стационарна точка за функцията $u = f(M)$ е възможно да бъде точка на локален екстремум. За да установим дали тя е точка на локален екстремум или не е, трябва да разполагаме с достатъчни условия за локален екстремум.

5.3.2. Достатъчни условия за локален екстремум. Знаем, че ако за втората производна на една функция $f(x)$ на една променлива в стационарна точка x_0 имаме $f''(x_0) > 0$ ($f''(x_0) < 0$), то в тази точка тя има строг локален минимум (строг локален максимум). За функция $u = f(M)$ на няколко променливи формулирането на достатъчни условия за локален екстремум се основава на изследването на втория ѝ диференциал $\mathrm{d}^2 f$ в разглежданата стационарна точка M_0. Да напомним, че той представлява квадратична форма на диференциалите $\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \ldots, \mathrm{d}x_n$ на независимите променливи $x_1, x_2, \ldots, x_n$, т.е.

$$\mathrm{d}^2 f(M_0) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, \mathrm{d}x_i \mathrm{d}x_j \,, \tag{17}$$

където

$$a_{ij} = a_{ji} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(M_0)\,. \tag{18}$$

За функция $z = f(x, y)$ на две променливи имаме

$$\mathrm{d}^2 f(M_0) = a_{11}\,(\mathrm{d}x)^2 + 2\,a_{12}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + a_{22}\,(\mathrm{d}y)^2,$$

където

$$a_{11} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_0), \quad a_{12} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M_0), \quad a_{22} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M_0) \tag{19}$$

Главните минори на матрицата $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ на тази квадратична форма са

$$\Delta_1(M_0) = a_{11} \quad \text{и} \quad \Delta(M_0) = \Delta_2(M_0) = a_{11}\,a_{22} - a_{12}^2 \,. \tag{20}$$

Може да се покаже, че при $\Delta_2(M_0) > 0$ тази квадратична форма е знакоопределена: положително определена е при $\Delta_1(M_0) > 0$ и отрицателно определена – при $\Delta_1(M_0) < 0$. Може също да се покаже, че при $\Delta_2(M_0) < 0$ вторият диференциал е знакопроменлива квадратична форма. От тези и други по-общи твърдения може да изведе следната теорема.

Теорема 2. *Нека функцията $z = f(M) = f(x, y)$ има непрекъснати втори частни производни в околност на точката $M_0(x_0, y_0)$, която е стационарна точка за функцията. Тогава:*

1. *Ако $\Delta(M_0) > 0$, то функцията $f(x, y)$ има локален екстремум в точката M_0; при това,*

   а) *ако $a_{11} < 0$, екстремумът е строг локален максимум,*

   б) *ако $a_{11} > 0$, екстремумът е строг локален минимум.*

2. *Ако $\Delta(M_0) < 0$, то функцията $f(x, y)$ няма локален екстремум в точката M_0.*

Забележка. *Ако $\Delta(M_0) = 0$, то в точката M_0 функцията $f(x, y)$ може да има, но може и да няма локален екстремум.* В това ни убеждава разглеждането на функциите $f(x, y) = x^2 + y^4$ и $g(x, y) = x^2 - y^4$. В общата им стационарна точка $O(0, 0)$ имаме $\Delta(O) = 0$ и за двете функции, но $f(x, y)$ има локален минимум в точката $O(0, 0)$, а $g(x, y)$ няма локален екстремум в тази точка.

Пример 1. *Да намерим локалните екстремуми на функцията*

$$f(x, y) = x^3 + 12xy^2 - 15x - 24y\ .$$

► Функцията е диференцируема в цялата равнина $\mathbb{R}^2$. За първите ѝ частни производни получаваме

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 12y^2 - 15, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 24xy - 24\ .$$

Тогава за системата от уравнения за определяне на стационарните точки имаме

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{array}\right. \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left|\begin{array}{r} x^2 + 4y^2 - 5 = 0 \\ xy - 1 = 0\ . \end{array}\right.$$

От второто уравнение изразяваме $y = \dfrac{1}{x}$ и го заместваме в първото. Това води до получаване на биквадратното уравнение $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$, което се свежда до квадратното уравнение $t^2 - 5t + 4 = 0$ чрез субституцията $t = x^2$. На решението му $t_1 = 1$ и $t_2 = 4$ съответства решението $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ и $x_3 = -2$, $x_4 = 2$ на биквадратното уравнение, на което пък според връзката $y = \dfrac{1}{x}$ съответстват $y_1 = -1$, $y_2 = 1$ и $y_3 = -\dfrac{1}{2}$, $y_4 = \dfrac{1}{2}$. Следователно стационарните точки за функцията са следните: $M_1(-1, -1)$, $M_2(1, 1)$, $M_3\Big(-2, -\dfrac{1}{2}\Big)$ и $M_4\Big(2, \dfrac{1}{2}\Big)$.

За вторите частни производни на функцията в произволна точка $M(x, y)$ получаваме

$$a_{11}(M) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 6x, \quad a_{12}(M) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 24y, \quad a_{22}(M) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 24x,$$

откъдето намираме

$$\Delta(M) = a_{11}\, a_{22} - a_{12}^2 = 144(x^2 - 4y^2)\ .$$

За точките $M_1(-1, -1)$ и $M_2(1, 1)$ имаме $\Delta(M_1) = \Delta(M_2) = 144(1 - 4) < 0$, откъдето заключаваме, че тези стационарни точки не са точки на локален екстремум за функцията. За точките $M_3\Big(-2, -\dfrac{1}{2}\Big)$ и $M_4\Big(2, \dfrac{1}{2}\Big)$ обаче имаме $\Delta(M_3) = \Delta(M_4) =$

$144(4-1) > 0$, откъдето следва, че те са точки на локален екстремум за функцията. Тъй като $a_{11}(M_3) = -12 < 0$, то в точката M_3 функцията има локален максимум, чиято стойност е равна на $f(M_3) = f\left(-2, -\frac{1}{2}\right) = 28$. За точката M_4 е изпълнено $a_{11}(M_4) = 12 > 0$ и затова в тази точка функцията има локален минимум, чиято стойност е равна на $f(M_4) = f\left(2, \frac{1}{2}\right) = -28$. ◀