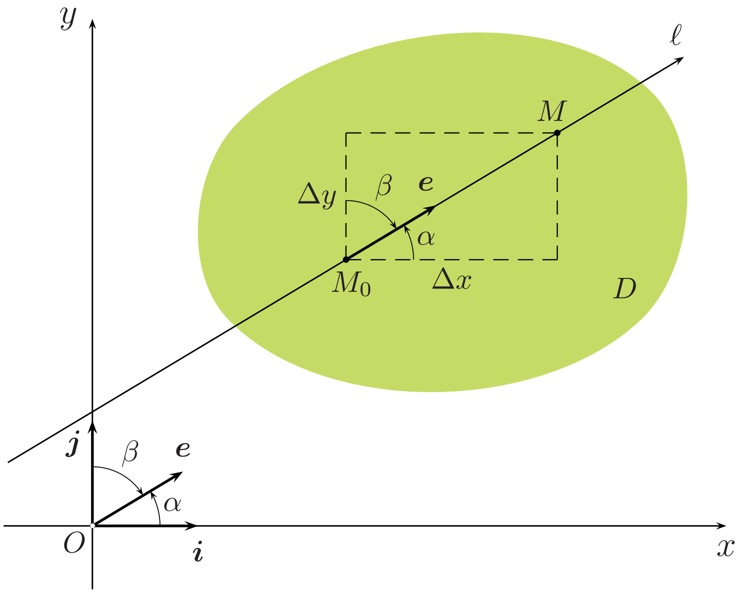
4. Производна по направление. Градиент

Нека функцията $f(x,y)$ е дефинирана в множеството D и точката $M_0(x_0,y_0)$ е вътрешна точка на D. Нека още ℓ е права, минаваща през точката M_0, и $\boldsymbol{e}$ е единичен вектор, колинеарен на тази права. Векторът $\boldsymbol{e}$ превръща правата ℓ в ос, т.е. задава положителна посока върху нея, съвпадаща с посоката на $\boldsymbol{e}$. Нека точката $M(x,y)$ е също точка от оста ℓ и намираща се в D, вж. фиг. 4.1. Да означим с $\overline{M_0M}$ алгебричната мярка на насочената отсечка $\overrightarrow{M_0M}$ относно оста ℓ, т.е. $\overline{M_0M}$ е ориентираната дължина на $\overrightarrow{M_0M}$: числото $\overline{M_0M}$ е равно на дължината ѝ $|M_0M|$, ако $\overrightarrow{M_0M}$ и оста ℓ са еднопосочни, и $\overline{M_0M} = -|M_0M|$, ако $\overrightarrow{M_0M}$ и оста ℓ са противоположно насочени. Веднага се вижда, че ако оста ℓ е успоредна на абсцисната ос ox, а $\boldsymbol{e}$ е ортът $\boldsymbol{i}$, определящ положителната ѝ посока, то $\overline{M_0M} = x - x_0 = \Delta x$. Аналогично, ако оста ℓ е успоредна на ординатната ос Oy, а $\boldsymbol{e}$ е ортът $\boldsymbol{j}$, определящ положителната посока на тази ос, то $\overline{M_0M} = y - y_0 = \Delta y$. Ето защо алгебричната мярка $\overline{M_0M}$ е обобщение на нарастванията Δx и Δy, които заедно със съответните нараствания $\Delta_x f$ и $\Delta_y f$ на функцията $f(x,y)$ участват в дефинирането на съответните частни производни по променливите x и y. Следващото определение е естествено обобщение на определенията за тези частни производни.



Фиг. 4.1

Определение 1. *Ако съществува границата на частното на нарастването* $\Delta f = f(M) - f(M_0)$ *на функцията* f *и алгебричната мярка* $\overline{M_0M}$*, когато точката* M *се приближава неограничено към точката* M_0*, оставайки върху оста* ℓ*, се нарича* ***производна на функцията*** $f(x,y)$ ***по направление*** *(или* ***посока***[1]*) на вектора* $\boldsymbol{e}$ *в точката* M_0 *и се се означава с* $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}}(M_0)$*, т.е.*

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}}(M_0) = \lim_{M\to M_0} \frac{\Delta f}{\overline{M_0M}} = \lim_{M\to M_0} \frac{f(M) - f(M_0)}{\overline{M_0M}}. \tag{1}$$

За тази производна се използва също означението $D_{\boldsymbol{e}}(M_0)$. Тя характеризира скоростта на изменение на функцията $f(M)$ в точката M_0 по посока на вектора $\boldsymbol{e}$. Частните производни $\dfrac{\partial f}{\partial x}$

и $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ могат да се разглеждат като производните по направленията (посоките) на ортите $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{i}}(M_0), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{j}}(M_0)\ .$$

В сила е следва следната теорема:

Теорема 1. *Ако функцията $f(x, y)$ е диференцируема в точката $M_0(x_0, y_0)$, то в тази точка тя има производна по всяко направление $\boldsymbol{e}$, и тази производна се изразява единствено чрез производните ѝ по направленията на координатните оси, т.е. чрез частните ѝ производни, посредством формулата*

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}}(M_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)\cos\beta. \tag{2}$$

където α и β са ъглите, които единичният вектор $\boldsymbol{e}$ сключва с координатните оси.

Напомняме, че $\cos\alpha$ и $\cos\beta$ са координатите на единичния вектор $\boldsymbol{e}$, т.е. $\boldsymbol{e} = \cos\alpha\,\boldsymbol{i} + \cos\beta\,\boldsymbol{j}$; те се наричат *директорни косинуси* на вектора $\boldsymbol{e}$.

Спомняйки си формулата за изразяване на скаларното произведение на два вектора чрез координатите им, от формулата (2) забелязваме, че ако въведем вектора $\mathrm{grad}f$ чрез равенството

$$\mathrm{grad}f(M_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)\boldsymbol{j}, \tag{3}$$

то производната по направление $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}}$ може да се представи като скаларно произведение на този вектор и единичният вектор $\boldsymbol{e}$:

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}}(M_0) = \boldsymbol{e}\cdot \mathrm{grad}f(M_0). \tag{4}$$

Определение 2. *Векторът $\mathrm{grad}f(M_0)$, дефиниран с равенството (3), т.е. векторът, чиито координати са частните производни $\dfrac{\partial f}{\partial x}(M_0)$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}(M_0)$, се нарича* ***градиент*** *на функцията $f(M)$ в точката M_0.*

За вектора градиент се използва също означението ∇f, според което той се разглежда като "произведение" на функцията f и въведения от Хамилтън[2] абстрактен вектор

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}, \tag{5}$$

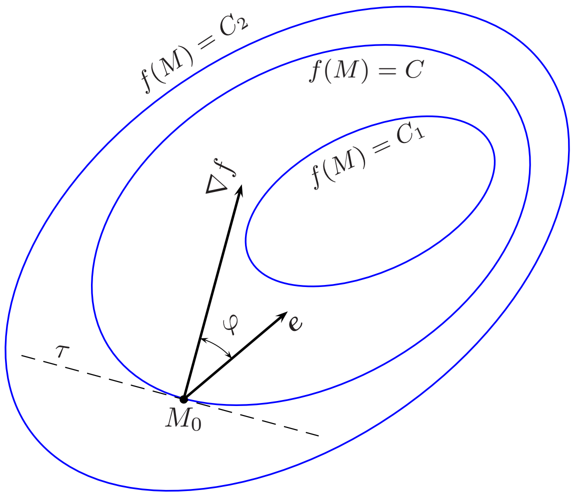
наречен *набла*, т.е. $\mathrm{grad}f = \nabla f$. Във векторния анализ[3] се оказва удобно абстрактният символ ∇ да се разглежда като истински вектор.

Според "геометричното" определение за скаларно произведение имаме $\boldsymbol{e}\cdot\nabla f = |\boldsymbol{e}||\nabla f|\cos\varphi = |\nabla f|\cos\varphi$, където φ е ъгълът между единичния вектор $\boldsymbol{e}$ и вектора градиент ∇f, вж. фиг. 4.2. Следователно равенството (2) може да се запише във вида

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}} = |\nabla f|\cos\varphi. \tag{6}$$

Оттук се вижда, че производната по направление $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}}$ има най-голяма стойност при $\cos\varphi = 1$ и тази стойност е равна на $|\nabla f|$. Но $\cos\varphi = 1 \Leftrightarrow \varphi = 0$ при $0 \le \varphi \le \pi$, т.е. когато векторът $\boldsymbol{e}$ е еднопосочен с вектора $|\nabla f|$. Така достигнахме до следното заключение.

Следствие 1. *Посоката на градиента ∇f на функцията $f(M)$ в дадена точка M_0 е посоката, по която функцията има най-голяма скорост на изменение в тази точка. Тази максимална скорост е равна на големината $|\nabla f|$ на градиента в точката M_0.*



Фиг. 4.2

От равенството (6) се вижда също, че производната по направление $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}}$ има минимална стойност при $\cos\varphi = -1 \Leftrightarrow \varphi = -\pi$ при $0 \leq \varphi \leq \pi$, т.е. когато векторите $\boldsymbol{e}$ и ∇f са противоположно насочени. Това означава, че по противоположната посока на ∇f функцията има най-малка стойност, равна на $-|\nabla f|$. Освен това забелязваме също, че $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}} = 0 \Leftrightarrow \cos\varphi = 0 \Leftrightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{2}$, т.е. скоростта на изменение на функцията по направлението τ, перпендикулярно на вектора ∇f, е равна на нула, вж. фиг. 4.2. Но функцията $f(M)$ не се променя върху линията на ниво $f(M) = C$, минаваща през разглежданата точка M_0. Това ни подсказва, че правата τ е допирателна към тази линия на ниво, откъдето пък следва, че векторът ∇f е насочен по правата, перпендикулярна на допирателната τ, т.е. по нормалата към линията на ниво $f(M) = C$. Може строго да се докаже, че това наистина е така за точките M_0, за които $\nabla f \neq \mathbf{0}$. Такива точки се наричат *неособени* за функцията (или скаларното поле) $f(M)$.

Теорема 4. *Във всяка неособена точка за функцията $f(M)$ градиентът ѝ ∇f е насочен по нормалата към линията на ниво, минаваща през тази точка, в посока на нарастването на $f(M)$.*

До тази теорема можем да достигнем интуитивно и по следния начин. Ако си мислим, че функцията $z = f(x, y)$ изразява надморската височина z на точките $M(x, y, z)$ от дадена местност, то тогава линиите на ниво $f(M) = C$ и $f(M) = C_1$ са проекциите върху "равнината на морето" Oxy на две пътеки от тази местност, лежащи в равнини, успоредни на равнината Oxy. Очевидно е, че най-стръмната пътека, свързваща тези две пътеки, е перпендикулярна на тях. Тази пътека определя посоката, в която сочи векторът ∇f, когато тези две пътеки стават безкрайно близки, т.е. при $C_1 \to C$, вж. фиг. 4.2.

Понятията производна по направление и градиент, както и свързаните с тях твърдения, се обобщават по очевиден начин и за функции на повече от две променливи. Например за функция $w = f(x, y, z)$ формулата (2) се заменя със следната формула:

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}}(M_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}(M_0)\cos\gamma,$$

а формулата (4) остава същата, но сега $\boldsymbol{e} = \cos\alpha\,\boldsymbol{i} + \cos\beta\,\boldsymbol{j} + \cos\gamma\,\boldsymbol{k}$ е единичен пространствен вектор, сключващ ъгли α, β и γ съответно с координатните оси Ox, Oy и Oz със съответни орти $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{k}$, а $\mathrm{grad} f = \nabla f$, където сега

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

е пространственият абстрактен вектор набла на Хамилтън.

---

[1] Може да се съобрази или да се провери по формулата (17) по-долу, че за производната по направление на вектора $-\boldsymbol{e}$, противоположен на $\boldsymbol{e}$, имаме $\dfrac{\partial f}{\partial(-\boldsymbol{e})} = -\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}}$. Ето защо е по-точно използването на термина производна по посока, а не по направление, макар че в литературата се среща по-често последното наименование.

[2] Уилям Хамилтън (1805-1865) е ирландски математик и механик.

[3] Векторният анализ е дял на математическия анализ, изучаващ векторните полета – функции, чиито стойности са вектори, дефинирани в множества от точки в равнината или пространството. Такова поле е например полето на градиента $\nabla f(M)$, дефинирано в точките M, в които съществуват частните производни на функцията $f(M)$.