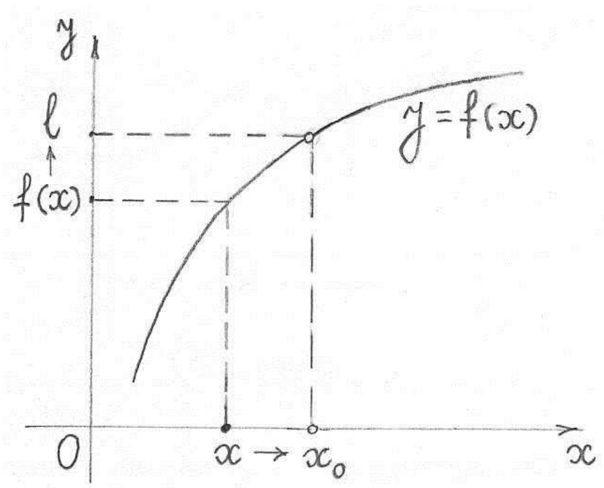
2. Граница на функция – определение и свойства. Едностранни граници. Безкрайно малки и безкрайно големи функции

2.1. Граница на функция.

Нека функцията $y = f(x)$ е дефинирана в интервала (a, b) с евентуално изключение на точката x_0 от този интервал. Да приемем, че в околност на точката x_0 функцията има поведението, представено чрез графиката ѝ на фиг. 5.1. Вижда се, че числото ℓ, изобразено чрез точка от оста Oy, има следните свойства.



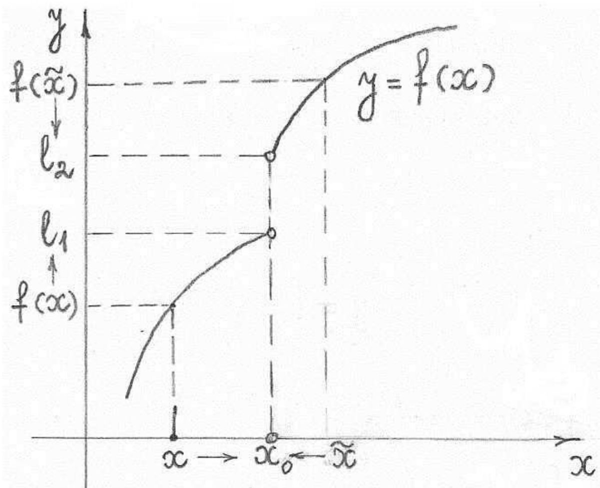
фиг. 5.1

Първо, когато точката x е близка до точката x_0, функционалната стойност $f(x)$ е близка до числото ℓ. При това, когато x става все по-близо и по-близо до x_0, стойността $f(x)$ става все по-близо и по-близо до ℓ. Второ, *разстоянията между точките $f(x)$ и точката ℓ от оста Oy може да станат толкова малки, колкото си пожелаем, щом точките x са достатъчно близки до x_0.* Интуитивно е ясно, че ако това свойство е налице, то налице е и първото, когато x е достатъчно близо до x_0.

Числото ℓ, притежаващо второто свойство, се нарича *граница на функцията $f(x)$ при x, клонящо към x_0* ($x \to x_0$). В този случай записваме

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \quad (\text{или } f(x) \to \ell \text{ при } x \to x_0) \ .$$

Ще отбележим само, че второто свойство, дефиниращо границата ℓ, може математически да се формализира, върху което тук няма да се спираме. Освен това, важно е да подчертаем, че в даденото определение точката x може да се намира както отляво, така и отдясно на точката x_0.



фиг. 5.2

Да разгледаме сега функцията $f(x)$, чието поведение е представено на фиг. 5.2. Вижда се, че *разстоянията между функционалните стойности $f(x)$ и точката ℓ_1 от оста Oy може да станат толкова малки, колкото си пожелаем, само ако точките x се намират достатъчно близко до точката x_0 отляво на нея, т.е. при $x < x_0$.* Аналогично *разстоянията между функционалните стойности $f(\widetilde{x})$ и точката ℓ_2 може да станат толкова малки, колкото си пожелаем, само когато точките $\widetilde{x}$ са достатъчно близко до точката x_0 отдясно на нея, т.е. при $\widetilde{x} > x_0$.* Ето защо числото ℓ_1 се нарича *лява граница на функцията $f(x)$ при x, клонящо към x_0*, а ℓ_2 – *дясна граница на функцията $f(x)$ при x, клонящо към x_0.* Тогава записваме

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \ell_1 \quad \Big(\text{или} \lim_{x\to x_0-0} f(x) = \ell_1\Big)$$

и

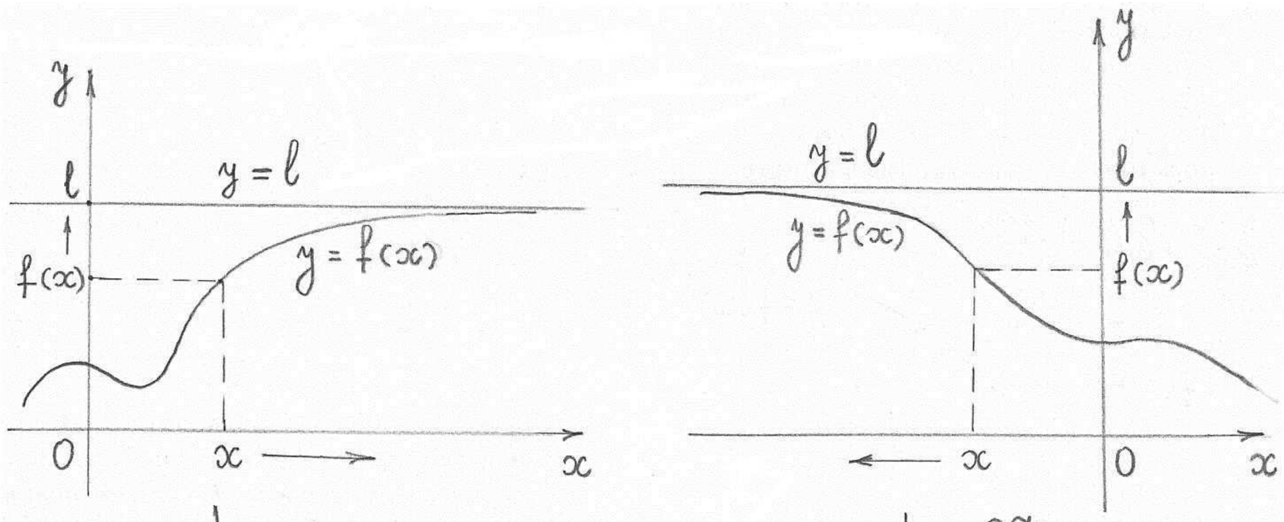
$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \ell_2 \quad \Big(\text{или} \lim_{x\to x_0+0} f(x) = \ell_2\Big) \, .$$

Лявата и дясната граници се наричат едностранни граници. От дадените определения лесно се съобразява верността на следното твърдение.

Теорема 2.1. *Функцията $f(x)$ има граница при $x \to x_0$ тогава и само тогава, когато съществуват едностранните граници при $x \to x_0$ и те са равни. Тогава трите граници съвпадат:*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x)\,. \qquad (1)$$

Да отбележим, че в край на дефиниционния интервал (a, b) можем да въведем само едната едностранна граница – дясната граница при $x \to a$ и лявата при $x \to b$.



фиг. 3а) фиг. 3б)

Да предположим сега, че функцията $f(x)$ е дефинирана в безкрайния интервал $(b, +\infty)$ и има поведението, представено на фиг. 5.3а). Вижда се, че сега числото ℓ има следните свойства. Първо, когато числото x става все по-голямо и по-голямо, функционалните стойности $f(x)$ стават все по-близки и по-близки до ℓ. Второ, *разстоянията между точките $f(x)$ и точката ℓ от оста Oy може да станат толкова малки, колкото си пожелаем, щом x е достатъчно голямо.* Числото ℓ, имащо това свойство, се нарича *граница на функцията $f(x)$ при x, клонящо към $+\infty$ ($x \to +\infty$)*. Тогава записваме

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \quad (\text{или } f(x) \to \ell \text{ при } x \to +\infty)\,.$$

Хоризонталната права $y = \ell$ се нарича *хоризонтална асимптота към графиката на функцията при $x \to +\infty$.*

Напълно аналогично се въвежда граница при $x \to -\infty$ при предположение, че функцията $f(x)$ е дефинирана в интервал $(-\infty, a)$, вж. фиг 3б). Тогава записваме

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell \quad (\text{или } f(x) \to \ell \text{ при } x \to -\infty)\,.$$

Сега правата $y = \ell$ се нарича *хоризонтална асимптота към графиката на функцията при $x \to -\infty$.*

Задача. Припомнете си графиките на показателната функция $f(x) = a^x$ и напишете на колко са равни границите

$$\lim_{x\to-\infty} a^x \ \text{ при} a > 1 \ \text{ и } \quad \lim_{x\to+\infty} a^x \ \text{ при } \ 0 < a < 1.$$

Определение. *Функция $y = f(x)$, дефинирана в множеството на естествените числа $\mathbb{N}$ се нарича числова редица. Всяка стойност $y_n = f(n)$ се нарича член на редицата, а естественото число n – негов номер.*

Редицата с членове y_n се записва във вида

$$y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots,$$

който за краткост означаваме с $\{y_n\}$. Функцията $f(n)$, $n \in \mathbb{N}$, се нарича *общ член на редицата.*

Числото ℓ се нарича граница на числовата редица $\{y_n\}$, ако ℓ е граница на функцията $f(n)$ при $n \to +\infty$. На свой ред това означава, че ℓ е граница на редицата, ако разстоянията между членовете ѝ y_n и ℓ могат да станат толкова малки, колкото си пожелаем, щом номерата им n са достатъчно големи.

Пример. Редицата с общ член $y_n = \frac{1}{n}$ се записва във вида

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

и има граница $\ell = 0$.

2.2. Безкрайно малки и безкрайно големи функции.

Определение. Функцията $\alpha(x)$ се нарича *безкрайно малка при* $x \to x_0$ (съответно *при* $x \to \pm\infty$), ако

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0 \quad \Big(\lim_{x \to \pm\infty} \alpha(x) = 0 \Big).$$

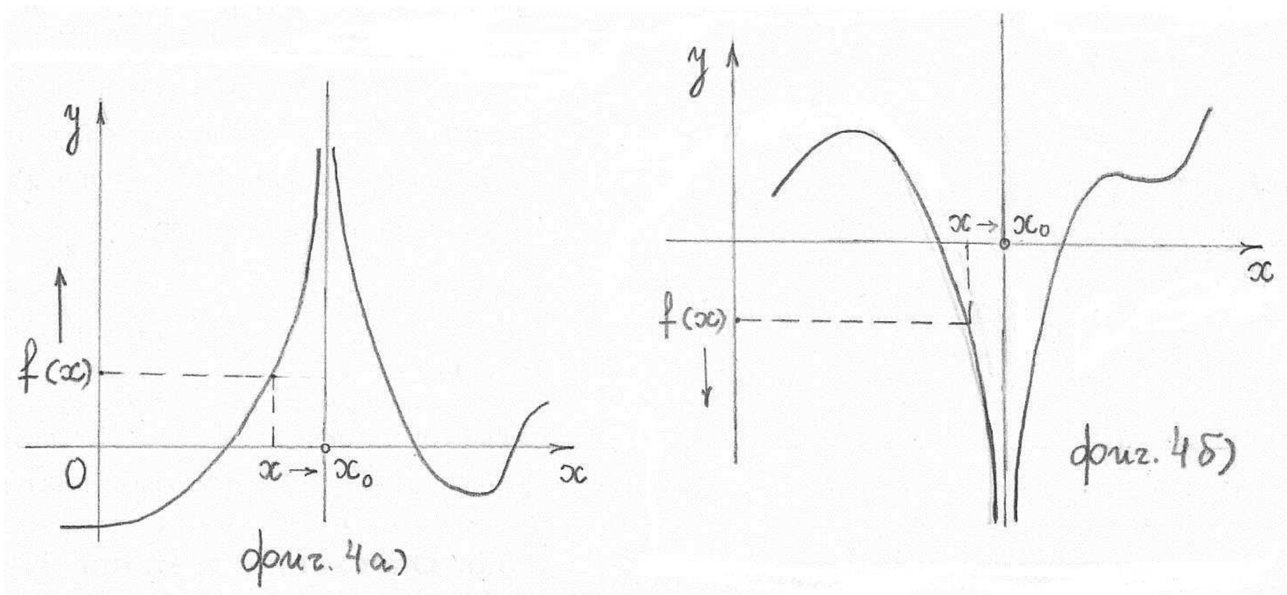
Например, степенната функцията $\alpha(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, е безкрайно малка при $x \to 0$, показателната функция $\beta(x) = a^x$ при $a > 1$ е безкрайно малка при $x \to -\infty$, докато при $0 < a < 1$ е безкрайно малка при $x \to +\infty$.

Много често се оказва полезно следното твърдение.

Теорема 2.2. *Функцията $f(x)$ има граница ℓ при $x \to x_0$ тогава и само тогава, когато $f(x)$ може да се представи във вида*

$$f(x) = \ell + \alpha(x), \tag{2}$$

където $\alpha(x)$ е безкрайно малка функция при $x \to x_0$.



Да разгледаме сега функцията $f(x)$, чието поведение в околност на точката x_0 е представено на фиг. 4а). Вижда се, че когато точката x се приближава към точката x_0, както отляво, така и отдясно на нея, функционалните стойности $f(x)$ стават все по-големи и по-големи. При това *стойностите на $f(x)$ могат да станат толкова големи, колкото си пожелаем, щом точките x са достатъчно близки до x_0.* Тогава се казва, че *функцията $f(x)$ клони към $+\infty$ при $x \to x_0$.* В този случай записваме

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \ \ (\text{или } f(x) \to +\infty \text{ при } x \to x_0)\ .$$

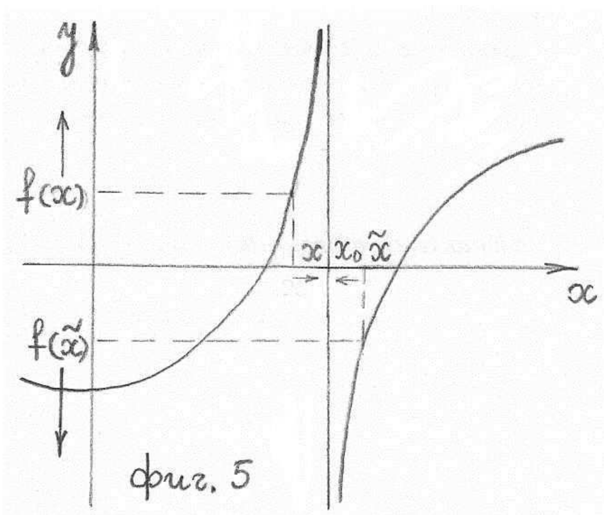
Определение. Функцията $f(x)$ се нарича *безкрайно голяма при* $x \to x_0$, ако модулът ѝ $|f(x)|$ клони към $+\infty$ при $x \to x_0$.

Очевидно е, че ако $f(x) \to +\infty$ при $x \to x_0$, то $f(x)$ е безкрайно голяма при $x \to x_0$. Други възможни случаи са показани на фиг. 4б) и фиг. 5. За функцията $f(x)$ от фиг. 4б) се казва, че тя клони към $-\infty$ при $x \to x_0$, което записваме така: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$. За функцията $f(x)$ от фиг. 5 имаме

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = +\infty \;\text{ и }\; \lim_{x\to x_0+0} f(x) = -\infty\,.$$

Вертикалната права $x = x_0$ на фиг. 4 и фиг. 5 се нарича *вертикална асимптота към графиката на функцията.*

Задача. Припомнете си графиките на функциите $f(x) = \operatorname{tg}(x)$ и $\operatorname{cotg}(x)$ и посочете точките, в които те са безкрайно големи. Конкретизирайте безкрайните граници $\lim\limits_{x\to \frac{\Pi}{2}-0} \operatorname{tg}(x)$, $\lim\limits_{x\to \frac{\Pi}{2}+0} \operatorname{tg}(x)$, $\lim\limits_{x\to 0-0} \operatorname{cotg}(x)$ и $\lim\limits_{x\to 0+0} \operatorname{cotg}(x)$.



Забележка. В определението за безкрайно голяма функция под точката x_0 може да се разбират и символите $+\infty$ и $-\infty$, т. е. да говорим за *безкрайно големи функции при* $x \to +\infty$ *или* $x \to -\infty$.

Например, $\lim\limits_{x=\pm\infty} x^2 = +\infty$, $\lim\limits_{x=+\infty} x^3 = +\infty$, а $\lim\limits_{x=-\infty} x^3 = -\infty$. Също така $\lim\limits_{x=+\infty} a^x = +\infty$ при $a > 1$ и $\lim\limits_{x=-\infty} a^x = +\infty$ при $0 < a < 1$.

Следващата теорема дава връзка между безкрайно малките и безкрайно големите функции.

Теорема 2.3. *В сила са твърденията:*

1. *Ако $f(x)$ е безкрайно голяма функция при $x \to x_0$, то $\dfrac{1}{f(x)}$ е безкрайно малка функция при $x \to x_0$.*
2. *Ако $\alpha(x)$ е безкрайно малка функция при $x \to x_0$, то $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ е безкрайно голяма функция при $x \to x_0$; при това, ако в достатъчно малка околност на точката x_0 имаме*
   (a) *$\alpha(x) < 0$ за $x \neq x_0$, то $\dfrac{1}{\alpha(x)} \to -\infty$ при $x \to x_0$,*
   (b) *$\alpha(x) > 0$ за $x \neq x_0$, то $\dfrac{1}{\alpha(x)} \to +\infty$ при $x \to x_0$.*

Примери. 1. Тъй като функцията $\alpha(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, е безкрайно малка при $x \to 0$, то функцията $\dfrac{1}{\alpha(x)} = \dfrac{1}{x^n}$ е безкрайно голяма при $x \to 0$. Освен това, тъй като $\alpha(x) > 0$ за четни n, то $\dfrac{1}{x^n} \to +\infty$ при $x \to 0$ за такива n. За нечетни n имаме $\alpha(x) < 0$ при $x < 0$ и $\alpha(x) > 0$ при $x > 0$. Следователно $\dfrac{1}{x^n} \to -\infty$ при $x \to 0$ и $x < 0$ (т.е. $x \to 0-0$), и $\dfrac{1}{x^n} \to +\infty$ при $x \to 0$ и $x > 0$ (т.е. $x \to 0+0$), щом n е нечетно.

2. Функцията $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, е безкрайно голяма при $x \to \pm\infty$. Следователно функцията $\dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{x^n}$ е безкрайно малка при $x \to \pm\infty$.

2.3. Операции с граници. Някои основни граници.

Теорема 2.4. *Ако съществуват крайни граници на функциите $f(x)$ и $g(x)$ при $x \to x_0$, то съществуват и границите на тяхната сума и разлика $f(x) \pm g(x)$, произведението $f(x)\,g(x)$ и частното им $\dfrac{f(x)}{g(x)}$. (За частното предполагаме, че $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$.) При това:*

а) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$,

б) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$,

в) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim_{x\to x_0}f(x)}{\lim_{x\to x_0}g(x)}$.

Забележка. Ако за частното $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ се окаже, че $\lim_{x\to x_0}f(x)=0$ и $\lim_{x\to x_0}g(x)=0$, то казваме, че имаме неопределеност от вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Аналогично, ако $f(x)$ и $g(x)$ са безкрайно големи функции при $x\to x_0$, казваме, че имаме неопределеност от вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Ако пък $f(x)$ е безкрайно малка, а $g(x)$ е безкрайно голяма при $x\to x_0$, то казваме че за произведението $f(x)\,g(x)$ имаме неопределеност от вида $[0\,\infty]$. Накрая, ако и двете функции клонят едновременно към $+\infty$ или едновременно към $-\infty$, то за разликата им $f(x)-g(x)$ имаме неопределеност от вида $[\infty-\infty]$. В посочените случаи няма правила, аналогични на тези от теорема 5.4, чрез които да се намерят съответните граници, ако те съществуват. Тогава трябва да се направят някои допълнителни преобразования на съответните изрази или да се използват правилата на Лопитал, използващи намирането на производни на съответни функции. Тези правила тук няма да се разглеждат.

В математиката и нейните приложения често се срещат две основни граници. Първата е

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\,. \tag{3}$$

Според теорема 2.2 това означава, че $\dfrac{\sin x}{x}=1+\alpha(x)$, където $\alpha(x)$ е безкрайно малка функция при $x\to 0$, или, еквивалентно,

$$\sin x = x+\gamma(x)\,,$$

където $\gamma(x)=\alpha(x)\beta(x)$ е безкрайно малка функция, явяваща се произведение на двете безкрайно малки функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)=x$. Ето защо $|\gamma(x)|$ приема стойности много по-малки от $|x|$, когато $|x|$ е достатъчно малко. Следователно разумно е тогава да приемем приближението $\sin(x)\approx x$.

Втората основна граница е

$$\lim_{x\to=+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\,, \tag{4}$$

където e се нарича *неперово число.* Това число е ирационално и, следователно, се представя с безкрайна непериодична дроб. С точност до първите седем десетични знака $e=2.7182818\ldots$. Показателната функция $f(x)=e^x$ се означава още с $\exp x$ и се нарича *експоненциална функция.* Логаритъмът при основа $a=e$ се нарича *натурален логаритъм* и се означава с ln, т. е. $\ln x=\log_e x$.

Да положим $x=\dfrac{1}{t}$ в (4). Имайки предвид, че тогава $t=\dfrac{1}{x}\to 0$ и $t>0$ при $x\to+\infty$, получаваме

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{t\to 0+0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e\,, \tag{5}$$

т. е. неперовото число може да се дефинира и чрез втората граница в това равенство. Може да се докаже, че това равенство е вярно също при $x\to-\infty$ и съответно $t\to 0-0$.