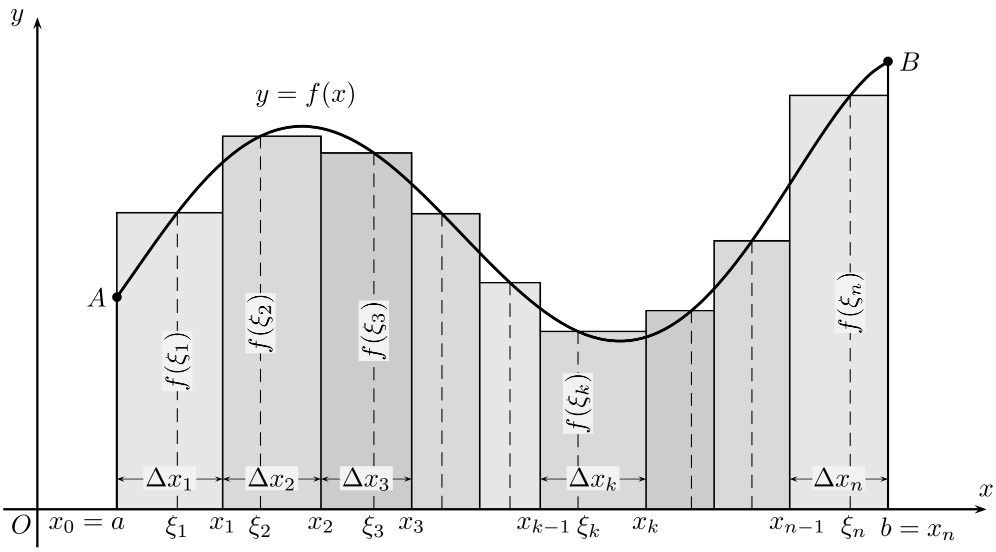
13. Определен интеграл – определение и основни свойства

13.1. Интегрални суми и определен интеграл. Нека функцията $y = f(x)$ е дефинирана в интервала $[a, b]$ $(a < b)$. Да разбием този интервал на n произволни части посредством точките $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{k-1}, x_k, \dots, x_{n-1}, x_n$ такива, че

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{k-1} < x_k < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$



Фиг. 13.1

вж. фиг. 13.1. Означаваме с $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_k, \dots, \Delta x_n$ дължините съответно на подинтервалите $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{k-1}, x_k], \dots, [x_{n-1}, x_n]$, т. е. $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ $(k = 1, 2, \dots, n)$. Във всеки един от тези подинтервали да изберем произволно по една точка: точка $\xi_1 \in [x_0, x_1]$, точка $\xi_2 \in [x_1, x_2]$, …, точка $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, …, точка $\xi_n \in [x_{n-1}, x_n]$.

Нека сега, само за момент, си мислим, че $f(x) \geq 0$ в интервала $[a, b]$, т. е. графиката ѝ е разположена над абсцисната ос Ox и евентуално има общи точки с нея. Тогава стойностите $f(\xi_k)$ на функцията в точките ξ_k са също неотрицателни и затова произведението $f(\xi_k)\Delta x_k$ представлява лицето на правоъгълника с основа подинтервала $[x_{k-1}, x_k]$ и височина $f(\xi_k)$ $(k = 1, 2, \dots, n)$. Следователно сумата

$$S_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \cdots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k, \tag{1}$$

изразява лицето на стъпаловидната фигура, съставена от всички такива правоъгълници, вж. фиг. 13.1. Вижда се, че тази стъпаловидна фигура е близка до фигурата $abBA$, ограничена отгоре от графиката на функцията $y = f(x)$, отдолу – от абсцисната ос Ox, и отстрани – от вертикалните прави $x = a$ и $x = b$. Фигурата $abBA$ ще наричаме *криволинеен трапец.* Следователно можем да приемем сумата S_n за едно приближение на "лицето" на криволинейния трапец.

Да означим с λ дължината на най-голямия от подинтервалите на разбиване $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_{n-1}, x_n]$, т. е. $\lambda = \max(\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n)$. Вижда се, че колкото λ е по-малко, толкова по-добре стъпаловидната фигура ще прилепва до криволинейния трапец. (Да отбележим, че намаляването на λ води до увеличаването на броя n на подинтервалите на разбиване, докато обратното може да не е вярно, т. е. това, че n расте, не означава, че λ намалява.) Ето защо естествено е под лице S на криволинейния трапец $abBA$ да разбираме границата на сумите S_n, когато λ клони към нула, т. е.

$$S = \lim_{\lambda \to 0} S_n \ . \tag{2}$$

Да се освободим сега от ограничението $f(x) \geq 0$ в $[a, b]$, т. е. нека $f(x)$ да бъде произволна функция, дефинирана в интервала $[a, b]$. Съответната ѝ сума S_n, образувана по същата формула (1), се нарича нейна *интегрална сума Риман.*[1] Очевидно S_n зависи от начина на разбиване на интервала $[a, b]$ на подинтервали и от избора на точките $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ в тези подинтервали, т. е. $S_n = S_n(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$. По аналогия на (2) се дефинира понятието определен интеграл от функцията $f(x)$ в интервала $[a, b]$.

Определение. Ако съществува крайна граница на интегралните суми S_n при λ клонящо към нула, независеща от начина на разбиване на интервала $[a, b]$ и от избора на точките $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, тази граница се нарича *определен интеграл от функцията* $f(x)$ *в интервала* $[a, b]$ и се означава със символа[2] $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, т. е.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda \to 0} S_n = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \tag{3}$$

В този случай функцията $f(x)$ се нарича *интегруема в интервала* $[a, b]$.

В означението на определения интеграл $f(x)$ се нарича подинтегрална функция, а числата a и b – съответно долна и горна граница на интегриране.

Да отбележим, че докато неопределеният интеграл $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$ от една функция $f(x)$ е множество от функции (съвкупността от всички примитивни на $f(x)$), то определеният интеграл $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ е число. Съгласно (2) и (3) това число, при условието $f(x) \geq 0$ в $[a, b]$, е лицето на криволинейния трапец $abBA$:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = S \ . \tag{4}$$

В това се състои *геометричния смисъл на определения интеграл.* Лесно се вижда, че ако $f(x) \leq 0$ в $[a, b]$, то височините на правоъгълниците в съответната стъпаловидна фигура са равни на $-f(\xi_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Следователно лицето на тази стъпаловидна фигура е равно на $-S_n$. Ето защо

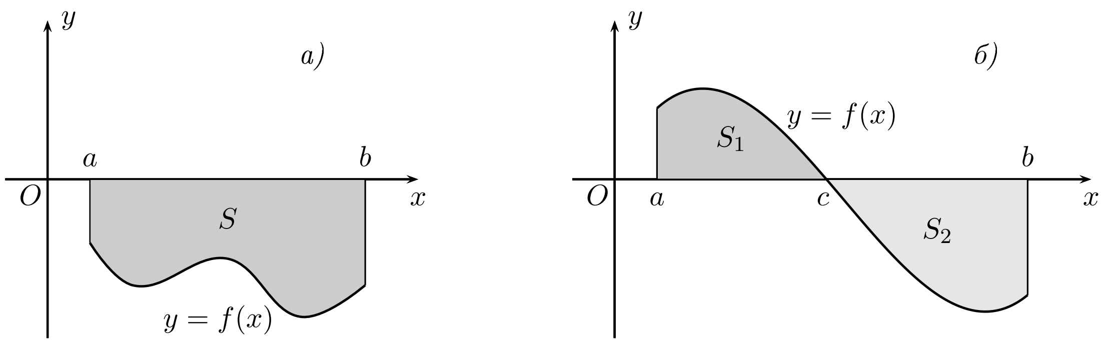
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -S \ , \qquad \text{ако} \quad f(x) \leq 0 \quad \text{в} \quad [a, b] \tag{5}$$

[1] B. Riemann (1826-1866) – немски математик

[2] Символът за интеграл $\int$ произлиза от буквата S, която се използва често в математиката за означаване на суми: $\int$ се получава от S чрез вертикално разтягане.

(вж. фиг. 13.2а)). Ако $f(x)$ мени знака си в $[a,b]$, например, по начина, показан на фиг. 13.2б), имаме

$$S = S_1 + S_2 = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x - \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x \ . \tag{6}$$



Фиг. 13.2

13.2. Кои функции са интегруеми? В интегралното смятане се доказва, че ако една функция е интегруема в интервала $[a,b]$, тя е ограничена в този интервал. Не всяка ограничена функция, обаче, е интегруема. Доказва се, че *непрекъснатите функции в интервала $[a,b]$ са интегруеми в този интервал.* Нещо повече, доказва се също, че ако една функция е ограничена и има краен брой точки на прекъсване в интервала $[a,b]$, то тя е интегруема в $[a,b]$.

13.3. Основни свойства на определения интеграл. Определеният интеграл от функция в интервал $[a,b]$ въведохме при естественото предположение $a < b$.

При $a = b$ интервалът $[a,b]$ се изражда в точка и затова всички дължини Δx_k са равни на нула, $k = 1, 2, \ldots, n$. Ето защо е естествено да приемем, че

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \ . \tag{7}$$

Тъй като номерацията на точките на разбиване започваме да правим от края a към края b, то при $a > b$ имаме $b = x_n < \cdots < x_k < x_{k-1} < \cdots < x_2 < x_1 < x_0 = a$ и затова $\Delta x_k = x_k - x_{k-1} < 0$ ($k = 1, 2, \ldots, n$). Ето защо при $a > b$ дефинираме

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x \ . \tag{8}$$

От определението за определен интеграл могат да се изведат следните негови свойства:

Свойство 1. Постоянен множител α може да се изнесе пред знака на определения интеграл, т. е.

$$\int_a^b \alpha\, f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ , \tag{9}$$

ако $f(x)$ е интегруема в интервала $[a,b]$.

Свойство 2. Определен интеграл от сума на две функции е равен на сумата от интегралите им, т. е.

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\ \mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \ , \tag{10}$$

ако $f(x)$ и $g(x)$ са интегруеми в интервала $[a, b]$.

От свойства 2 и 1 получаваме следното

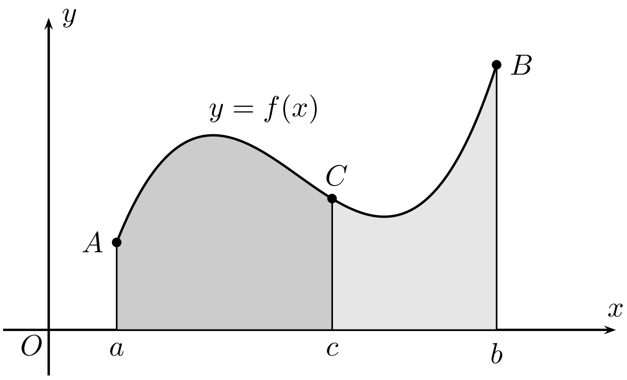
Следствие 1. Определен интеграл от линейна комбинация на две функции е равен на съответната линейна комбинация от интегралите им, т. е.

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]\, \mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\, \mathrm{d}x\ , \tag{11}$$

ако $f(x)$ и $g(x)$ са интегруеми в интервала $[a, b]$. В частност, полагайки в (11) $\alpha = 1$ и $\beta = -1$, получаваме

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]\, \mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\, dx - \int_a^b g(x)\, \mathrm{d}x\ . \tag{12}$$

Свойство 3. Ако функцията $f(x)$ е интегруема в $[a, b]$, то тя е интегруема във всеки интервал $[c, d]$, съдържащ се в $[a, b]$.



Фиг. 13.3

Свойство 4. За произволни три числа a, b и c е в сила равенството

$$\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\, \mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\, \mathrm{d}x\ , \tag{13}$$

ако интегралите от дясната му страна съществуват.

При $a < c < b$ последното свойство е очевидно от геометрични съображения: при $f(x) \geq 0$ в $[a, b]$ равенството (13) изразява факта, че за лицата на съответните криволинейни трапеци, показани на фиг. 13.3, е изпълнено равенството $S_{abBA} = S_{acCA} + S_{cbBC}$. За да докажем свойство 4 и в случая, когато точката c не е от интервала $[a, b]$, например, ако $a < b < c$, следва да се позовем на пояснения вече случай на свойство 4 и на равенството (8).

Свойство 5. Ако функцията $f(x)$ е интегруема в интервала $[a, b]$ и $f(x) \geq 0$ в $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x \geq 0 \quad \text{при} \quad a < b. \tag{14}$$

Наистина, в този случай интегралът дава лицето S на криволинейния трапец $abBA$, което е неотрицателно число.

Свойство 6. Ако функциите $f(x)$ и $g(x)$ са интегруеми в интервала $[a, b]$ и $f(x) \leq g(x)$ за всяко $x \in [a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\, \mathrm{d}x \quad \text{при} \quad a < b. \tag{15}$$

Докажете това свойство като първо приложите свойство 5 за функцията $h(x) = g(x) - f(x)$, за която очевидно имаме $h(x) \geq 0$ в $[a, b]$. След това се позовете на равенството (12).

13.4. Средна стойност на функция. Нека функцията $f(x)$ е интегруема в интервала $[a, b]$. Тогава границата на интегралните суми S_n не зависи от начина на разбиване на интервала

$[a,b]$ и затова можем да изберем точките на разбиване $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ да са равноотдалечени. При този избор $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \cdots = \Delta x_n = \Delta x$, където $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$. Следователно

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x = \Delta x \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \; .$$

Тогава величината

$$\sigma_n = \frac{1}{b-a}\, S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) = \frac{f(\xi_1) + f(\xi_2) + \cdots + f(\xi_n)}{n}$$

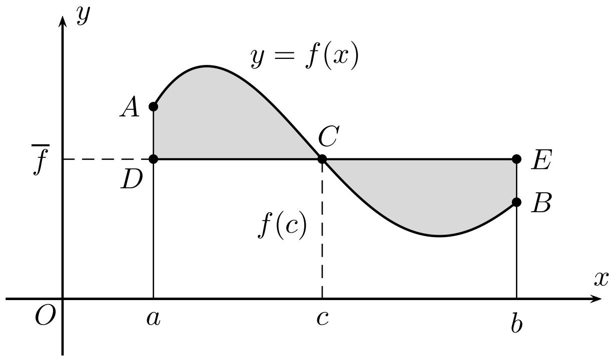
представлява *средно аритметичното* на стойностите $f(\xi_1), f(\xi_2), \ldots, f(\xi_n)$ на функцията $f(x)$ съответно в точките $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. С увеличаване на броя на точките на разбиване n ще се увеличава броя на стойностите $f(\xi_k)$ на функцията $f(x)$, участващи в израза на σ_n. Следователно границата[3]

$$\overline{f} = \lim_{n\to\infty} \sigma_n = \frac{1}{b-a} \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

може да се разглежда като средно аритметичното на "всички стойности" на функцията $f(x)$, които тя приема в интервала $[a,b]$. Ето защо числото

$$\overline{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{16}$$

се нарича *средна стойност на функцията* $f(x)$ *в интервала* $[a,b]$.



Фиг. 13.4

Да запишем сега равенството (16) във вида

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{f}\,(b-a) \; .$$

При предположение, че $f(x) \geq 0$ в интервала $[a,b]$, на последното равенство можем да дадем следното геометрично тълкуване: лицето на криволинейния трапец $abBA$, съответстващ на функцията $f(x)$, разглеждана в $[a,b]$, е равно на лицето на правоъгълника $abED$ с основа интервала $[a,b]$ и височина $\overline{f}$, вж. фиг. 13.4. От същата фигура се вижда, че правата $y = \overline{f}$ трябва да пресича графиката на $f(x)$ в някаква точка C. Може да се докаже, че за непрекъснатите функции това е винаги така, т. е. в сила е следното свойство:

Теорема за средните стойности (в интегралното смятане). *Ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в интервала $[a,b]$, то $f(x)$ приема средната си стойност $\overline{f}$ в този интервал, т. е. съществува точка $c \in [a,b]$ такава, че*

$$f(c) = \overline{f} \; . \tag{17}$$

[3]Да отбележим, че сега $\lambda = \Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ и затова $\lambda \to 0$ е еквивалентно на $n \to \infty$.