# 12. Неопределен интеграл. Основни методи за интегриране

Освен задачата за намиране на производната $f(x)$ на една функция $F(x)$, т. е. на $f(x) = F'(x)$, важна задача в математиката и нейните приложения е и обратната задача: по дадена функция $f(x)$ да се намери такава функция $F(x)$, производната на която да е равна на функцията $f(x)$.

## 12.1. Примитивна и неопределен интеграл.

**Определение 1.** Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в интервала $(a, b)$. Функцията $F(x)$ се нарича *примитивна на функцията* $f(x)$ *в интервала* $(a, b)$, ако $F(x)$ е диференцируема в този интервал и

$$F'(x) = f(x) \quad \text{за всяко} \quad x \in (a, b)\ . \tag{1}$$

**Примери:**

1. Функцията $F(x) = \sin x$ е примитивна на функцията $f(x) = \cos x$ върху цялата числова права (в интервала $(-\infty, +\infty)$), тъй като $(\sin x)' = \cos x$ за всяко $x \in (-\infty, +\infty)$.

2. Функцията $F_1(x) = \ln x$ е примитивна на функцията $f(x) = \dfrac{1}{x}$ в интервала $(0, +\infty)$ (интервалът, в който $F_1(x)$ е дефинирана!), тъй като $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ за всяко $x \in (0, +\infty)$. Аналогично функцията $F_2(x) = \ln(-x)$ е примитивна на същата функция $f(x) = \dfrac{1}{x}$, но в интервала $(-\infty, 0)$. Ето защо функцията $F(x) = \ln|x|$ е примитивна на функцията $f(x) = \dfrac{1}{x}$ в интервалите $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$.

3. Функцията $F(x) = x^3$ е примитивна на функцията $f(x) = 3\,x^2$ върху цялата числова права, тъй като $(x^3)' = 3\,x^2$ за всяко $x \in (-\infty, +\infty)$. Очевидно функцията $F_1(x) = x^3 + 5$ е също примитивна на $f(x) = 3\,x^2$, тъй като $(x_3 + 5)' = (x^3)' + (5)' = 3\,x^2$.

Въобще, ако функцията $F(x)$ е примитивна на функцията $f(x)$, т. е. $F'(x) = f(x)$, то и функцията $F(x) + C$, където $C$ е произволна константа, е също примитивна на $f(x)$, тъй като $[F(x) + C]' = f(x)$ за всяко число $C$. В сила е следното твърдение.

**Теорема 1.** Ако $F(x)$ е примитивна на функцията $f(x)$ в интервала $(a, b)$, то произволна друга примитивна $\Phi(x)$ на $f(x)$ в този интервал има вида $\Phi(x) = F(x) + C$, където $C$ е някаква константа.

От теорема 1 следва, че ако $F(x)$ е една от примитивните на функцията $f(x)$, то множеството от функции $F(x)+C$, което се получава, когато $C$ пробягва множеството на всички реални числа, изчерпва множеството на всички примитивни на функцията $f(x)$.

**Определение 2.** Множеството от всички примитивни на функцията $f(x)$ в интервала $(a, b)$ се нарича *неопределен интеграл от функцията* $f(x)$ *в този интервал* и се означава със символа $\int f(x)\,\mathrm{d}x$, т. е.

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C\ , \tag{2}$$

където $F(x)$ е примитивна на $f(x)$, а $C$ е произволна константа.

В означението на неопределения интеграл функцията $f(x)$ се нарича *подинтегрална функция*, изразът $f(x)\,\mathrm{d}x$ – *подинтегрален израз*, а стоящата след символа за диференциал $d$ променлива $x$ – *интеграционна променлива* или променлива на интегрирането.

Операцията за намиране на неопределения интеграл на дадена функция, т. е. на нейните примитивни, се нарича *интегриране*. Тъй като интегрирането е обратна операция на диференцирането, тя се нарича още антидиференциране.

Позовавайки се на определенията за примитивна и неопределен интеграл, можем лесно да установим следните свойства.

**Свойство 1.** Производната на неопределения интеграл е равна на подинтегралната функция, т. е.

$$\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = f(x) \ ,$$

а диференциалът му е равен на подинтегралния му израз:

$$\mathrm{d}\int f(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\,\mathrm{d}x, \tag{3}$$

т. е. *знаците* d *и* $\int$*, разположени в реда* d$\int$*, взаимно се съкращават.*

**Свойство 2.** Неопределеният интеграл от производната на една функция е равен на тази функция с точност до константа, т. е.

$$\int F'(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C \ ,$$

или, тъй като $F'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}F(x)$,

$$\int \mathrm{d}F(x) = F(x) + C \ , \tag{4}$$

т. е. *знаците* d *и* $\int$ *се съкращават и в реда* $\int$ d*, но сега към* $F(x)$ *трябва да се прибави произволна константа.*

Равенствата (3) и (4) изразяват факта, че операциите диференциране и интегриране са взаимно обратни.

**Свойство 3.** Постоянен множител, различен от нула, може да се изнесе извън знака на неопределения интеграл, т. е.

$$\int \alpha\, f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha\int f(x)\,\mathrm{d}x \ , \qquad \text{ако} \quad \alpha \neq 0 \ . \tag{5}$$

**Свойство 4.** Ако функциите $f(x)$ и $g(x)$ имат примитивни в интервала $(a, b)$, то и функцията $f(x) \pm g(x)$ има също примитивна в този интервал и е изпълнено равенството

$$\int (f(x) \pm g(x))\ \mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x \ . \tag{6}$$

**12.2. Таблица на основните неопределени интеграли.** Имайки предвид таблицата за производните на основните елементарни функции и това, че ако

$$F'(x) = f(x), \qquad \text{то} \quad \int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C \ ,$$

можем лесно да получим следната съответна таблица на основните неопределени интеграли:

$$
\begin{array}{lll}
(1) & \displaystyle\int x^{\alpha}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1) & \Leftarrow \quad (x^{\alpha})' = \alpha\, x^{\alpha-1}\ , \\
(2) & \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C \quad (x \neq 0) & \Leftarrow \quad (\ln|x|)' = \frac{1}{x}\ , \\
(3) & \displaystyle\int a^{x}\,\mathrm{d}x = \frac{a^{x}}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 0) & \Leftarrow \quad (a^{x})' = a^{x}\ln a, \\
(4) & \displaystyle\int e^{x}\,\mathrm{d}x = e^{x} + C & \Leftarrow \quad (e^{x})' = e^{x}\ , \\
(5) & \displaystyle\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\,\cos x + C & \Leftarrow \quad (\cos x)' = -\,\sin x\ , \\
(6) & \displaystyle\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C & \Leftarrow \quad (\sin x)' = \cos x\ , \\
(7) & \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \tan x + C & \Leftarrow \quad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}\ , \\
(8) & \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\,\cot x + C & \Leftarrow \quad (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}\ , \\
(9) & \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x + C & \Leftarrow \quad (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}\ , \\
(10) & \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C & \Leftarrow \quad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ , \\
(11) & \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a}} = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C \quad (\alpha \neq 0)\ . &
\end{array}
$$

Изключение в тази таблица прави само последния интеграл, тъй като няма основна елементарна функция, чиято производна да е пропорционална на подинтегралната му функция. Проверката на равенството (11) е по-сложна и затова тук няма да я привеждаме.

## 12.3. Основни методи за интегриране.

*12.3.1 Непосредствено интегриране.* Този метод се основава на непосредственото използване на свойства 3 и 4 на неопределения интеграл и таблицата на основните интеграли.

**Примери:**

$$
\begin{aligned}
1. \quad \int \left(3\,\sin x + \frac{2}{x} - \frac{5}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x &= 3\int \sin x\,\mathrm{d}x + 2\int \frac{\mathrm{d}x}{x} - 5\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \\
&= -3\,\cos x + 2\,\ln|x| - 5\arctan x + C\ .
\end{aligned}
$$

Понякога, обаче, се налага предварително да се направят някои тъждествени преобразования на подинтегралната функция.

$$
\begin{aligned}
2. \quad \int \tan^2 x\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \left\{\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right\}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} - \int \mathrm{d}x = \tan x - x + C\ .
\end{aligned}
$$

3. $$\int \frac{x^4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x^4-1+1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(x^2-1)(x^2+1)+1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int \left(x^2-1+\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$$
$$= \int x^2\,\mathrm{d}x - \int \mathrm{d}x + \int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{x^3}{3} - x + \arctan x + C\ .$$

*12.3.2 Интегриране чрез смяна на променливата.* В много случаи въвеждането на нова интеграционна променлива позволява пресмятането на даден интеграл да се сведе до пресмятането на друг интеграл чрез непосредствено интегриране или друг познат ни метод. Възможни са следните две взаимно свързани ситуации.

*1) Подинтегралният израз на разглеждания интеграл има вида $f(\psi(x))\psi'(x)\,\mathrm{d}x$, а интегралът $\int f(t)\,\mathrm{d}t$ може да се пресметне лесно.* Тогава

$$\int f(\psi(x))\psi'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(t)\,\mathrm{d}t\Big|_{t=\psi(x)}\ , \tag{7}$$

където символичният запис от дясната страна на това равенство означава, че след като пресметнем интеграла $\int f(t)\,\mathrm{d}t$ трябва да заместим променливата $t$ с $\psi(x)$. Тъй като $\psi'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}\psi(x)$, то интегралът от лявата страна на (7) може да се запише във вида

$$\int f(\psi(x))\,\mathrm{d}\psi(x)\ ,$$

който подсказва избора на полагането (субституцията) $t=\psi(x)$. В този случай казваме, че функцията $\psi'(x)$ е внесена под знака на диференциала. Ето защо интегрирането чрез субституцията $t=\psi(x)$ по формулата (7) се нарича *интегриране чрез внасяне под знака на диференциала.*

Обосноваването на формулата (7) е елементарно. Наистина, нека

$$\int f(t)\,\mathrm{d}t = F(t) + C\ , \tag{8}$$

т. е. $F'(t)=f(t)$. Позовавайки се на правилото за диференциране на сложна функция и отчитайки този факт, получаваме

$$\Big[F\big(\underbrace{\psi(x)}_{t}\big)\Big]' = F'\big(\underbrace{\psi(x)}_{t}\big)\,\psi'(x) = f\big(\underbrace{\psi(x)}_{t}\big)\,\psi'(x)\ ,$$

което показва, че функцията $F\big(\psi(x)\big)$ е примитивна на подинтегралната функция на интеграла от лявата страна на (1), т. е.

$$\int f(\psi(x))\psi'(x)\,\mathrm{d}x = F\big(\psi(x)\big) + C\ .$$

Но $F\big(\psi(x)\big)+C$, съгласно (8), представлява точно дясната страна на (7).

**Пример.** Да пресметнем интеграла

$$\int \sin^3 x\cos x\,\mathrm{d}x\ .$$

Тъй като $\cos x\,\mathrm{d}x = (\sin x)'\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}\sin x$, то можем да внесем $\cos x$ под знака на диференциала и да положим $t=\sin x$:

$$\int \sin^3 x\cos x\,\mathrm{d}x = \int \sin^3 x\,\mathrm{d}\sin x = \int t^3\,\mathrm{d}t\Big|_{t=\sin x} = \left(\frac{t^4}{4}+C\right)\Big|_{t=\sin x} = \frac{\sin^4 x}{4} + C\ .$$

На практика "напомнянето" за връщане към променливата $x$ по формулата $t=\psi(x)$ (в случая $t=\sin x$), означено с вертикална черта, не се пише, като се "помни", че това трябва да бъде направено.

Позовавайки се на следните елементарни свойства на диференциала: $\mathrm{d}\omega(x) = \mathrm{d}(\omega(x) \pm b)$ и $\mathrm{d}\omega(x) = \dfrac{1}{a}\mathrm{d}(a\omega(x))$, където $a$ и $b$ са константи ($a \neq 0$) и $\omega(x)$ е диференцируема функция, достигаме до формулите

$$\int f(x)\,\mathrm{d}\omega(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}\big(\omega(x) \pm b\big), \quad \int f(x)\,\mathrm{d}\omega(x) = \frac{1}{a}\int f(x)\,\mathrm{d}\big(a\,\omega(x)\big)\ . \tag{9}$$

Първата от тях показва, че интегралът не се променя, ако под знака на диференциала прибавим или извадим произволна константа $b$, а втората, че интегралът не се променя, ако под знака на диференциала умножим с число $a$, различно от нула, и същевременно разделим интеграла на това число.

Много често се налага да се пресметне интеграл от вида $\int f(a\,x+b)\,\mathrm{d}x$. Позовавайки се на свойствата (9) при $\omega(x) = x$, имаме

$$\int f(a\,x+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int f(a\,x+b)\,\mathrm{d}(a\,x+b)\ ,$$

което подсказва да направим линейната субституция $t = a\,x+b$. Така получаваме

$$\int f(a\,x+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int f(t)\,\mathrm{d}t\Big|_{t=a\,x+b}\ . \tag{10}$$

Например,

$$\int \cos(3\,x+11)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \cos(\underbrace{3\,x+11}_{t})\,\mathrm{d}(\underbrace{3\,x+11}_{t}) = \frac{1}{3}\int \cos t\,\mathrm{d}t\Big|_{t=3\,x+11} = \frac{1}{3}\sin(3\,x+11)+C.$$

*2) Подинтегралният израз $f(x)\,\mathrm{d}x$ на разглеждания интеграл се опростява съществено при подходяща субституция $x = \varphi(t)$.* Тогава

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\Big|_{t=\psi(x)}\ , \tag{11}$$

където $t = \psi(x)$ е обратната функция на функцията $x = \varphi(t)$.[1]

Да отбележим, че десният интеграл в (11) се получава от левия чрез формалната замяна на $x$ с $\varphi(t)$, отчитайки, че $\mathrm{d}x = \mathrm{d}\varphi(t) = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$.

Формулата (11) може да се обоснове по следния начин. Да приложим правилото за интегриране (7) за интеграла $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$. Така достигаме до равенството

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int f(x)\,\mathrm{d}x\Big|_{x=\varphi(t)}\ , \tag{12}$$

което, в същност, представлява равенството (11) (при разменени лява и дясна страна), но изразено чрез променливата $t$. Изразявайки в (12) $t$ с $x$ по формулата $t = \psi(x)$ и отчитайки, че при двете последователни замествания $x = \varphi(t)$ и $t = \psi(x)$ интегралът $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ не се променя, веднага достигаме до формулата (11).

**Пример.** Да пресметнем интеграла

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt[3]{x})}\ .$$

[1] Съществуването на обратната функция е необходимо условие за прилагането на субституцията $x = \varphi(t)$. Това условие е изпълнено, ако функцията $x = \varphi(t)$ е строго монотонно растяща (или намаляваща).

С цел да се освободим от двата корена едновременно, да положим $x = \varphi(t) = t^6$. Оттук $\sqrt{x} = t^3$, $\sqrt[3]{x} = t^2$, $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = 6\,t^5\,\mathrm{d}t$ и $t = \psi(x) = \sqrt[6]{x}$. Получаваме последователно

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt[3]{x})} &= \int \frac{6\,t^5\,\mathrm{d}t}{t^3(1+t^2)}\bigg|_{t=\sqrt[6]{x}} = 6\int \frac{t^2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}\bigg|_{t=\sqrt[6]{x}} = 6\int \frac{t^2+1-1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\bigg|_{t=\sqrt[6]{x}}\\ &= 6\int\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t\bigg|_{t=\sqrt[6]{x}} = 6\left\{\int \mathrm{d}t - \int \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right\}\bigg|_{t=\sqrt[6]{x}}\\ &= 6(t-\arctan t\,)\bigg|_{t=\sqrt[6]{x}} + C = 6(\sqrt[6]{x} - \arctan\sqrt[6]{x}\,) + C\ .\end{aligned}$$

*12.3.3 Интегриране по части.* Този метод се основава на следното твърдение.

**Теорема 2.** Нека функциите $u(x)$ и $v(x)$ са диференцируеми в интервала $(a,b)$ и функцията $u'(x)v(x)$ има примитивна в този интервал. Тогава функцията $u(x)v'(x)$ също има примитивна в интервала $(a,b)$ и е в сила формулата

$$\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x \tag{13}$$

Формулата (13) се нарича *формула за интегриране по части.* Предвид равенствата $v'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}v(x)$ и $u'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}u(x)$, тя се записва във вида

$$\int u(x)\,\mathrm{d}v(x) = u(x)v(x) - \int v(x)\,\mathrm{d}u(x)\ . \tag{14}$$

Доказателството на теорема 2 се основава на формулата за диференциране на произведението на функциите $u(x)$ и $v(x)$:

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\ ,$$

откъдето

$$u(x)v'(x) = [u(x)v(x)]' - u'(x)v(x)\ .$$

Съгласно условието на теоремата функцията $u'(x)v(x)$ има примитивна в интервала $(a,b)$, а една примитивна на функцията $[u(x)v(x)]'$ е $u(x)v(x)$. Следователно функцията $u(x)v'(x)$ има също примитивна в интервала $(a,b)$, тъй като представлява разлика на интегруеми функции, вж. свойство 4. Според същото свойство последното равенство може почленно да се интегрира. Това интегриране ни води до формулата (13).

**Примери:**

1. За да пресметнем интеграла $\int \arctan x\,\mathrm{d}x$, полагаме $u = \arctan x$ и $v = x$. Тогава по формулата (14) имаме

$$\begin{aligned}&\int \arctan x\,\mathrm{d}x = x\,\arctan x - \int x\,\mathrm{d}\arctan x = x\,\arctan x - \int x\,\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\\ &= x\,\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{(x^2)'}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = x\,\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}(1+x^2)\\ &= x\,\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{t}\bigg|_{t=1+x^2} = x\,\arctan x - \frac{1}{2}\,\ln(1+x^2) + C\ .\end{aligned}$$

В повечето случаи, обаче, изборът $v(x) = x$ не е подходящ. Налага се предварително подходяща функция да се внесе под знака на диференциала и така да определим $v(x)$.

За интеграли от вида

$$\int g(x)\,\ln x\,\mathrm{d}x,\quad \int g(x)\,\arcsin x\,\mathrm{d}x,\quad \int g(x)\,\arctan x\,\mathrm{d}x,$$

където $g(x)$ е дадена функция, "рецептата" е тази функция предварително да се внесе под знака на диференциала.

2. $$\int \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\int \left(\frac{1}{x}\right)'\ln x\,\mathrm{d}x = -\int \ln x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right) = -\left\{\frac{1}{x}\ln x - \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}\ln x\right\}$$
$$= -\frac{1}{x}\ln x + \int \frac{1}{x}\,\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{x}\ln x + \int x^{-2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{x}\ln x + \frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x}\,(1+\ln x) + C\ .$$

За интеграли от вида

$$\int P(x)\,e^{mx+b}\,\mathrm{d}x,\quad \int P(x)\,\sin(mx+b)\,\mathrm{d}x \quad \text{и} \quad \int P(x)\,\cos(mx+b)\,\mathrm{d}x,$$

където $P(x)$ е полином, а $m$ и $b$ са константи, рецептата е под знака на диференциала да се внесат съответно функциите $e^{mx+b}$, $\sin(mx+b)$ и $\cos(mx+b)$.

3. $$\int x\,e^{3x-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int x\,e^{3x-1}\,\mathrm{d}(3x-1) = \frac{1}{3}\int x\,\mathrm{d}e^{3x-1} = \frac{1}{3}\left\{x\,e^{3x-1} - \int e^{3x-1}\,\mathrm{d}x\right\}$$
$$= \frac{1}{3}\left\{x\,e^{3x-1} - \frac{1}{3}\int e^{3x-1}\,\mathrm{d}(3x-1)\right\} = \frac{1}{3}\left\{x\,e^{3x-1} - \frac{1}{3}\int e^{t}\,\mathrm{d}t\bigg|_{t=3x-1}\right\}$$
$$= \frac{1}{3}\left\{x\,e^{3x-1} - \frac{1}{3}\,e^{3x-1}\right\} + C = \frac{1}{9}\,(3x-1)\ e^{3x-1} + C\ .$$