Локален екстремум на функция на две променливи

Определение 1. *Нека функцията $f(x,y)$ в дефинирана в областта $D \subset \mathbb{R}^2$ и $(x_0,y_0) \in D$. Казваме, че $f(x,y)$ има* ***локален максимум (локален минимум)*** *в точката (x_0,y_0), ако съществува околност U на (x_0,y_0) такава, че $U \subset D$ и за всяка точка $(x,y) \in U$ е изпълнено неравенството $f(x,y) \le f(x_0,y_0)$ $(f(x,y) \ge f(x_0,y_0))$.*

Ако функцията $f(x,y)$ има локален максимум или локален минимум в точката (x_0,y_0), то още се казва, че $f(x,y)$ има ***локален екстремум*** *в тази точка.*

Забележка 1. *Нека функцията $f(x,y)$ има локален екстремум в точката (x_0,y_0). Тогава от определението следва, че съществува околност U на точката (x_0,y_0) такава, че:*

1) $f(x,y) \le f(x_0,y_0)$ за всяка точка $(x,y) \in U$, ако екстремумът е максимум;

2) $f(x,y) \ge f(x_0,y_0)$ за всяка точка $(x,y) \in U$, ако екстремумът е минимум.

Да разгледаме пълното нарастване на $f(x,y)$ в точката (x_0,y_0):

$$\Delta f(x_0,y_0) = f(x,y) - f(x_0,y_0).$$

Стандартно пълното нарастване се означава със символа $\Delta f(x_0,y_0)$, в който е включена само фиксираната точка (x_0,y_0). Тук при решаването на задачи ще ни бъде необходима и променящата се точка (x,y), поради което ще използваме и разширеното означение $\Delta f((x,y),(x_0,y_0))$:

$$\Delta f((x,y),(x_0,y_0)) = f(x,y) - f(x_0,y_0).$$

Използвайки пълното нарастване можем да запишем споменатите по-горе точки 1) и 2) по следния начин:

1) $\Delta f((x,y),(x_0,y_0)) \le 0$ за всяка точка $(x,y) \in U$, ако екстремумът е максимум;

2) $\Delta f((x,y),(x_0,y_0)) \ge 0$ за всяка точка $(x,y) \in U$, ако екстремумът е минимум.

Можем да направим следните изводи:

I) за да докажем, че функцията $f(x,y)$ има локален максимум в точка (x_0,y_0), трябва да намерим една околност U на (x_0,y_0), която притежава свойството, че във всяка точка $(x,y) \in U$ пълното нарастване $\Delta f((x,y),(x_0,y_0))$ има отрицателен знак.

II) за да докажем, че функцията $f(x,y)$ има локален минимум в точка (x_0,y_0), трябва да намерим една околност U на (x_0,y_0), която притежава свойството, че във всяка точка $(x,y) \in U$ пълното нарастване $\Delta f((x,y),(x_0,y_0))$ има положителен знак.

III) за да докажем, че функцията $f(x,y)$ няма локален екстремум в точка (x_0,y_0), трябва във всяка околност U на (x_0,y_0) да намерим по две точки (x'_U,y'_U) и (x''_U,y''_U) такива, че в тях пълното нарастване на $f(x,y)$ да има различни знаци, т.е. примерно $\Delta f((x'_U,y'_U),(x_0,y_0))>0$ и $\Delta f((x''_U,y''_U),(x_0,y_0))<0$.

Теорема 1 (Необходимо условие за локален екстремум)**.** *Ако функцията $f(x,y)$ има локален екстремум в точката (x_0,y_0), то е изпълнено едното от следващите две твърдения:*

1) не съществува $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ или не съществува $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$;

2) двете частни производни $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ съществуват и $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0$.

Забележка 2. *Непосредствено следствие от Теорема 1 е твърдението:*

Ако двете частни производни на функцията $f(x,y)$ в точката (x_0,y_0) съществуват и някоя от тях не е равна на 0, то в (x_0,y_0) функцията $f(x,y)$ няма локален екстремум.

Следователно една функция $f(x,y)$ ***може да има*** *локален екстремум само в точки, за които е изпълнено едното от условията:*

1) в тях не съществува някоя от частните производни на функцията $f(x,y)$;

2) решения са на системата $\left|\begin{array}{l}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0.\end{array}\right.$

Теорема 2 (Достатъчно условие за локален екстремум)**.** *Нека са изпълнени условията:*

1) функцията $f(x,y)$ е диференцируема в околност на точката (x_0,y_0);

2) функцията $f(x,y)$ е два пъти диференцируема в самата точка (x_0,y_0);

3) точката (x_0,y_0) е точка на възможен екстремум за функцията $f(x,y)$.

Въвеждаме означението

$$\Delta(x_0,y_0)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)\right)^2.$$

Тогава:

1) ако $\Delta(x_0,y_0)>0$, то функцията $f(x,y)$ има локален екстремум в точката (x_0,y_0), като при това:

а) ако $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)<0$, то екстремумът е максимум;

б) ако $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)>0$, то екстремумът е минимум.

2) ако $\Delta(x_0, y_0) < 0$, то функцията $f(x, y)$ няма локален екстремум в точката (x_0, y_0).

Забележка 3. *Понятието* ***точка на възможен екстремум*** *в условието на Теорема 2 ознава такава точка, която удолетворява условие 2) от Теорема 1.*

В случая, когато $\Delta(x_0, y_0) = 0$, е възможно функцията $f(x, y)$ както да има, така и да няма локален екстремум в точката (x_0, y_0).

Задача 1. *Да се намерят локалните екстремуми на функцията*

$$f(x, y) = x^2 - 2xy + 4y^3 + 3.$$

Решение. Дефиниционната област на функцията $f(x, y)$ е $\mathbb{R}$. Пресмятаме частните производни на $f(x, y)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x - 2y; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2x + 12y^2.$$

Ясно е, че тези две частни производни съществуват във всяка точка $(x, y) \in \mathbb{R}$. Следователно всички точки на възможен екстремум за функцията $f(x, y)$ ще се получат като решения на системата

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 2x - 2y = 0 \\ -2x + 12y^2 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} y = x \\ -2x + 12x^2 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} y = x \\ 2x(6x - 1) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left| \begin{array}{l} y = x \\ 2x = 0 \end{array} \right. \\ \left| \begin{array}{l} y = x \\ 6x - 1 = 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left| \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array} \right. \\ \left| \begin{array}{l} x = \frac{1}{6} \\ y = \frac{1}{6} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Така получихме, че възможните точки на локален екстремум са $(0, 0)$ и $\left(\dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{6}\right)$.

За да използваме достатъчното условие за локален екстремум са ни необходими вторите производни на $f(x, y)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 24y; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = -2.$$

Заместваме във формулата, дефинираща функцията $\Delta(x, y)$:

$$\Delta(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)\right)^2 = 2.24y - (-2)^2 = 48y - 4.$$

1) Разглеждаме точката $(0,0)$. Стойността на функцията $\Delta(x,y)$ в тази точка е $\Delta(0,0) = -4 < 0$. Като използваме достатъчното условие за локален екстремум се получава, че в точката $(0,0)$ функцията $f(x,y)$ няма локален екстремум.

2) Разглеждаме точката $\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right)$. Стойността на функцията $\Delta(x,y)$ в тази точка е $\Delta\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right) = 4 > 0$. Сега от достатъчното условие за локален екстремум следва, че в точката $\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right)$ функцията $f(x,y)$ има локален екстремум. И тъй като $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right) = 2 > 0$, в точката $\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right)$ функцията $f(x,y)$ има локален минимум. $\square$

Задача 2. *Да се намерят локалните екстремуми на функцията*

$$f(x,y) = 3x^2y - x^3 - y^4 + 1.$$

Решение. Дефиниционната област на функцията $f(x,y)$ е $\mathbb{R}$. Пресмятаме частните производни на $f(x,y)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 6xy - 3x^2; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3x^2 - 4y^3.$$

Ясно е, че тези две частни производни съществуват във всяка точка $(x,y) \in \mathbb{R}$. Следователно всички точки на възможен екстремум за функцията $f(x,y)$ ще се получат като решения на системата

$$\left|\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 6xy - 3x^2 = 0 \\ 3x^2 - 4y^3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 6xy - 3x^2 = 0 \\ 6xy - 4y^3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 3x(2y - x) = 0 \\ 2y\left(3x - 2y^2\right) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left|\begin{array}{l} 3x = 0 \\ 2y = 0 \end{array}\right. \\ \left|\begin{array}{l} 3x = 0 \\ 3x - 2y^2 = 0 \end{array}\right. \\ \left|\begin{array}{l} 2y - x = 0 \\ 2y = 0 \end{array}\right. \\ \left|\begin{array}{l} 2y - x = 0 \\ 3x - 2y^2 = 0 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left|\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array}\right. \\ \left|\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array}\right. \\ \left|\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array}\right. \\ \left|\begin{array}{l} x = 2y \\ 6y - 2y^2 = 0 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left|\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \end{array}\right. \\ \left|\begin{array}{l} x=2y \\ 2y\,(3-y)=0 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left|\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \left|\begin{array}{l} x=2y \\ 2y=0 \end{array}\right. \\ \left|\begin{array}{l} x=2y \\ 3-y=0 \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left|\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \left|\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \end{array}\right. \\ \left|\begin{array}{l} x=6 \\ y=3 \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left|\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \end{array}\right. \\ \left|\begin{array}{l} x=6 \\ y=3 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Така получихме, че възможните точки на локален екстремум са $(0,0)$ и $(6,3)$.

За да използваме достатъчното условие за локален екстремум са ни необходими вторите производни на $f\,(x,y)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,(x,y) = 6y-6x; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,(x,y) = -12y^2; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\,(x,y) = 6x.$$

Заместваме във формулата, дефинираща функцията $\Delta\,(x,y)$:

$$\Delta\,(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,(x,y)\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,(x,y) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\,(x,y)\right)^2 =$$

$$= (6y-6x)\,.\left(-12y^2\right) - (6x)^2 = 72y^2\,(x-y) - 36x^2 = 36\left(2y^2\,(x-y) - x^2\right).$$

1) Разглеждаме точката $(6,3)$. Стойността на функцията $\Delta\,(x,y)$ в тази точка е $\Delta\,(6,3) = 36\left(2.3^2\,(6-3)-6^2\right) = 36\,(54-36) > 0$. От достатъчното условие за локален екстремум следва, че в точката $(6,3)$ функцията $f\,(x,y)$ има локален екстремум. И тъй като $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,(6,3) = 6.3-6.6 < 0$, в точката $(6,3)$ функцията $f\,(x,y)$ има локален максимум.

2) Разглеждаме точката $(0,0)$. Стойността на функцията $\Delta\,(x,y)$ в тази точка е $\Delta\,(0,0) = 0$. Това означава, че не е възможно да използваме достатъчното условие за да определим дали $f\,(x,y)$ има в $(0,0)$ локален екстремум. За да направим това ще използваме определението (и по точно, направените след него забележки).

Да пресметнем пълното нарастване на функцията $f\,(x,y)$ в точката $(0,0)$:

$$\Delta f\,((x,y)\,,(0,0)) = f\,(x,y) - f\,(0,0) = \left(3x^2y - x^3 - y^4 + 1\right) - 1 = 3x^2y - x^3 - y^4.$$

Тук имаме две възможности:

а) да намерим една околност на $(0,0)$, в която стойностите на пълното нарастване са или само неположителни, или само неотрицателни, откъдето ще направим извода, че $f\,(x,y)$ има локален екстремум в точката $(0,0)$.

б) да покажем, че във всяка околност на $(0,0)$ пълното нарастване приема както положителни, така и отрицателни стойности, откъдето ще направим извода, че $f\,(x,y)$ няма локален екстремум в точката $(0,0)$.

Като имаме в предвид, че $\Delta f\left((x,y),(0,0)\right)=3x^2y-x^3-y^4$, по-вероятната възможност е б). Ще опитаме да намерим във всяка околност на $(0,0)$ една точка, в която стойността на пълното нарастване е положителна, и втора точка, в която стойността на пълното нарастване е отрицателна.

Нека U е произволна околност на точката $(0,0)$. Всъщност това означава, че U е кръг с център $(0,0)$ и произволен радиус $r>0$, т.е. $U=\left\{(x,y):\sqrt{x^2+y^2}<r\right\}$. Координатите на точките, които ще изберем, ще зависят от радиуса r, като по този начин ще е сигурно, че разсъжденията, които правим, са валидни за произволна околност (т.е. за околност с произволен радиус).

Първо да изберем точката $\left(-\frac{r}{2},0\right)$. Очевидно е, че тя принадлежи на кръга U. Пресмятайки стойността на пълното нарастване в тази точка получаваме

$$\Delta f\left(\left(-\frac{r}{2},0\right),(0,0)\right)=-\left(-\frac{r}{2}\right)^3>0.$$

Втората точка, която ще изберем, е $\left(0,\frac{r}{2}\right)$. Отново е очевидно, че тя принадлежи на кръга U. Пресмятаме стойността на пълното нарастване във втората точка:

$$\Delta f\left(\left(0,\frac{r}{2}\right),(0,0)\right)=-\left(\frac{r}{2}\right)^4<0.$$

Следователно функцията $f(x,y)$ няма локален екстремум в точката $(0,0)$. □

Задача 3. *Да се намерят локалните екстремуми на функцията*

$$f(x,y)=1-\sqrt{x^2+y^2}.$$

Решение. Дефиниционната област на функцията $f(x,y)$ е $\mathbb{R}$. Пресмятаме частните производни на $f(x,y)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=-\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}.2x=-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}};\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}.2y=-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Двете функциите, които се получиха при пресмятането на частните производни, са дефинирани в множеството $\mathbb{R}\setminus\{(0,0)\}$. Налага се да проверим чрез определението дали функцията $f(x,y)$ има частни производни в точката $(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\overset{def}{=}\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt{x^2}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{-|x|}{x}.$$

Границата $\lim\limits_{x\to0}\frac{-|x|}{x}$ не съществува (защото при пресмятане на лявата и на дясната граница при $x\to0$ на функцията $\frac{-|x|}{x}$ се получават съответно числата 1 и -1), което означава, че и частната производна $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ не съществува. Следователно точката $(0,0)$ е точка на възможен екстремум.

Пресмятането на другата частна производна $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ не е необходимо (по аналогичен начин може да се покаже, че и тя не съществува).

Други точки на възможен екстремум за функцията $f(x,y)$ можем да получим решавайки системата

$$\left|\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=0 \\ -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0 \end{array}\right.$$

Тази система обаче няма решения (точката $(0,0)$ не принадлежи на дефиниционната област на двете функции, намиращи се в лявата страна на уравненията).

Така получихме, че единствената възможна точка на локален екстремум е $(0,0)$. Тъй като в нея не съществуват частните производни на функцията $f(x,y)$, не можем да използваме достатъчното условие за локален екстремум.

За да определим дали $f(x,y)$ има локален екстремум в точката $(0,0)$ ще използваме определението (и направените след него забележки).

Да пресметнем пълното нарастване на функцията $f(x,y)$ в точката $(0,0)$:

$$\Delta f((x,y),(0,0)) = f(x,y) - f(0,0) = \left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right) - 1 = -\sqrt{x^2+y^2}.$$

Според изискванията на определението за да има $f(x,y)$ локален екстремум в точката $(0,0)$, трябва да намерим една околност U на $(0,0)$, в която пълното нарастване да има постоянен знак.

За разглежданата в тази задача функция обаче е очевидно, че $\Delta f((x,y),(0,0)) = -\sqrt{x^2+y^2} \le 0$ във всяка точка $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Това означава, че пълното нарастване ще има отрицателен знак във всяка околност на $(0,0)$.

За да удовлетворим изискването на определението избираме

$$U = \left\{(x,y) : \sqrt{x^2+y^2} < 1\right\}.$$

Вече стана ясно, че за всяка точка $(x,y) \in U$ е изпълнено неравенството $\Delta f((x,y),(0,0)) = -\sqrt{x^2+y^2} \le 0$. Следователно функцията $f(x,y)$ има локален максимум в точката $(0,0)$.

$\square$

Задача 4. *Да се намерят локалните екстремуми на функцията*

$$f(x,y) = x^3 + 2y^3 - 6y^2 - 27x + 2.$$

Решение. Дефиниционната област на функцията $f(x,y)$ е $\mathbb{R}$. Пресмятаме частните производни на $f(x,y)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 27; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 6y^2 - 12y.$$

Ясно е, че тези две частни производни съществуват във всяка точка $(x,y) \in \mathbb{R}$. Следователно всички точки на възможен екстремум за функцията $f(x,y)$ ще се получат като решения на системата

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 3x^2 - 27 = 0 \\ 6y^2 - 12y = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 3(x-3)(x+3) = 0 \\ 6y(y-2) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left| \begin{array}{l} x-3=0 \\ 6y=0 \end{array} \right. \\ \left| \begin{array}{l} x-3=0 \\ y-2=0 \end{array} \right. \\ \left| \begin{array}{l} x+3=0 \\ 6y=0 \end{array} \right. \\ \left| \begin{array}{l} x+3=0 \\ y-2=0 \end{array} \right. \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left| \begin{array}{l} x=3 \\ y=0 \end{array} \right. \\ \left| \begin{array}{l} x=3 \\ y=2 \end{array} \right. \\ \left| \begin{array}{l} x=-3 \\ y=0 \end{array} \right. \\ \left| \begin{array}{l} x=-3 \\ y=2 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Така получихме, че възможните точки на локален екстремум са $(3,0)$, $(3,2)$, $(-3,0)$ и $(-3,2)$.

За да използваме достатъчното условие за локален екстремум са ни необходими вторите производни на $f(x,y)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6x; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 12y - 12; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0.$$

Заместваме във формулата, дефинираща функцията $\Delta(x,y)$:

$$\Delta(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\right)^2 = 6x.(12y-12) - (0)^2 = 72x(y-1).$$

1) Разглеждаме точката $(3,0)$. Стойността на функцията $\Delta(x,y)$ в тази точка е $\Delta(3,0) = 72.3.(-1) < 0$. Като използваме достатъчното условие за локален екстремум се получава, че в точката $(3,0)$ функцията $f(x,y)$ няма локален екстремум.

2) Разглеждаме точката $(3,2)$. Стойността на функцията $\Delta(x,y)$ в тази точка е $\Delta(3,2) = 72.3.1 > 0$. Сега от достатъчното условие за локален екстремум следва, че в точката $(3,2)$ функцията $f(x,y)$ има локален екстремум. И тъй като $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(3,2) = 6.3 > 0$, в точката $(3,2)$ функцията $f(x,y)$ има локален минимум.

3) Разглеждаме точката $(-3, 0)$. Стойността на функцията $\Delta(x, y)$ в тази точка е $\Delta(-3, 0) = 72.(-3).(-1) > 0$. От достатъчното условие за локален екстремум следва, че в точката $(-3, 0)$ функцията $f(x, y)$ има локален екстремум. Тъй като $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-3, 0) = 6.(-3) < 0$, в точката $(-3, 0)$ функцията $f(x, y)$ има локален максимум.

4) Разглеждаме точката $(-3, 2)$. Стойността на функцията $\Delta(x, y)$ в тази точка е $\Delta(-3, 2) = 72.(-3).1 < 0$. Като използваме достатъчното условие за локален екстремум се получава, че в точката $(-3, 2)$ функцията $f(x, y)$ няма локален екстремум. $\square$