Диференцируемост на функция на две променливи

Определение 1. *Нека функцията* $f(x,y)$ *в дефинирана в областта* $D \subset \mathbb{R}^2$ *и* $(x_0,y_0) \in D$. *Пълното нарастване на* $f(x,y)$ *в точката* (x_0,y_0) *се дефинира чрез*

$$\Delta f(x_0,y_0) = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0),$$

където $\Delta x = x - x_0$ *и* $\Delta y = y - y_0$.

Казваме, че функцията $f(x,y)$ *е* ***диференцируема*** *в* (x_0,y_0), *ако пълното нарастване* $\Delta f(x_0,y_0)$ *на* $f(x,y)$ *в* (x_0,y_0) *може да се представи във вида*

$$\Delta f(x_0,y_0) = A.\Delta x + B.\Delta y + \varepsilon(\Delta x,\Delta y), \tag{1}$$

където A *и* B *са числа, а функцията* $\varepsilon(\Delta x,\Delta y)$ *е такава, че*

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\varepsilon(\Delta x,\Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} = 0.$$

Определение 2. *Казваме, че функцията* $f(x,y)$ *е* ***диференцируема*** *в областта* $D \subset \mathbb{R}^2$, *ако* $f(x,y)$ *е диференцируема във всяка точка* $(x_0,y_0) \in D$.

Теорема 1. *Ако функцията* $f(x,y)$ *е диференцириема в точката* (x_0,y_0), *то* $f(x,y)$ *е непрекъсната в* (x_0,y_0).

Теорема 2 (Необходимо условие за диференцируемост)**.** *Ако функцията* $f(x,y)$ *е диференцириема в точката* (x_0,y_0), *то съществуват частните производни* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ *и* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$, *като при това са изпълнени равенствата*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = A, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = B,$$

а A *и* B *са числата от* (1). *Така условието за диференцируемост* (1) *може да се запише във вида*

$$\Delta f(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0).\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0).\Delta y + \varepsilon(\Delta x,\Delta y). \tag{2}$$

Теорема 3 (Достатъчно условие за диференцируемост)**.** *Ако в околност на точката* (x_0,y_0) *съществуват частните производни* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ *и* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ *на функцията* $f(x,y)$, *а в самата точка* (x_0,y_0) *тези частни производни са непрекъснати, то функцията* $f(x,y)$ *е диференцируема в точката* (x_0,y_0).

Задача 1. *Да се докаже, че функцията*

$$f\left(x,y\right)=\begin{cases}\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

има в точката $(0,0)$ *частни производни, но не е диференцируема в тази точка.*

Решение. Първо ще покажем, че съществуват двете частни производни на $f\left(x,y\right)$ в точката $(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(0,0\right)\overset{def}{=}\lim_{x\to 0}\frac{f\left(x,0\right)-f\left(0,0\right)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x^3}{x^2}-0}{x}=1.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(0,0\right)\overset{def}{=}\lim_{y\to 0}\frac{f\left(0,y\right)-f\left(0,0\right)}{y-0}=\lim_{y\to 0}\frac{-\dfrac{y^3}{y^2}-0}{y}=-1.$$

Сега да проверим дали функцията $f\left(x,y\right)$ е диференцируема в точката $(0,0)$. От равенството (2) се получава, че

$$\varepsilon\left(\Delta x,\Delta y\right)=\Delta f\left(x_0,y_0\right)-\frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0,y_0\right).\Delta x-\frac{\partial f}{\partial y}\left(x_0,y_0\right).\Delta y. \tag{3}$$

Пресмятаме пълното нарастване на функцията $f\left(x,y\right)$ в точката $(0,0)$:

$$\Delta f\left(0,0\right)=f\left(0+\Delta x,0+\Delta y\right)-f\left(0,0\right)=\frac{\Delta x^3-\Delta y^3}{\Delta x^2+\Delta y^2}-0=\frac{\Delta x^3-\Delta y^3}{\Delta x^2+\Delta y^2}.$$

Следователно след заместване в равенството (3) за функцията $\varepsilon\left(\Delta x,\Delta y\right)$ имаме

$$\varepsilon\left(\Delta x,\Delta y\right)=\Delta f\left(0,0\right)-\frac{\partial f}{\partial x}\left(0,0\right).\Delta x-\frac{\partial f}{\partial y}\left(0,0\right).\Delta y=\frac{\Delta x^3-\Delta y^3}{\Delta x^2+\Delta y^2}-1.\Delta x-\left(-1\right).\Delta y=$$

$$=\frac{\Delta x^3-\Delta y^3-\Delta x^3-\Delta x\Delta y^2+\Delta x^2\Delta y+\Delta y^3}{\Delta x^2+\Delta y^2}=\frac{\Delta x\Delta y\left(\Delta x-\Delta y\right)}{\Delta x^2+\Delta y^2}.$$

Разглеждаме границата

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\varepsilon\left(\Delta x,\Delta y\right)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta x\Delta y\left(\Delta x-\Delta y\right)}{\left(\Delta x^2+\Delta y^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

За да бъде функцията $f\left(x,y\right)$ диференцируема в точката $(0,0)$ трябва тази граница да е равна на 0. Обаче ако изберем например редиците $x_n=\dfrac{1}{n}$ и $y_n=-\dfrac{1}{n}$, то имаме, че $(x_n,y_n)\xrightarrow{n\to\infty}(0,0)$, но

$$\frac{\varepsilon\left(x_n,y_n\right)}{\sqrt{x_n^2+y_n^2}}=\frac{x_ny_n\left(x_n-y_n\right)}{\left(x_n^2+y_n^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\dfrac{1}{n}\left(-\dfrac{1}{n}\right)\left(\dfrac{1}{n}-\left(-\dfrac{1}{n}\right)\right)}{\left(\left(\dfrac{1}{n}\right)^2+\left(-\dfrac{1}{n}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{-\dfrac{2}{n^3}}{\dfrac{2\sqrt{2}}{n^3}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\xrightarrow{n\to\infty}-\frac{1}{\sqrt{2}}\neq 0,$$

т.е. $\displaystyle\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\varepsilon\left(\Delta x,\Delta y\right)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\neq 0$. Следователно функцията $f\left(x,y\right)$ не е диференцируема в точката $(0,0)$. □

Задача 2. *Да се докаже, че функцията*

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(x^2+y^2\right).\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

има частни производни в околност на точката $(0,0)$ *и е диференцируема в* $(0,0)$*, но частните производни не са непрекъснати в* $(0,0)$.

Решение. Да пресметнем частните производни на функцията $f(x,y)$. Ще разгледаме два случая:

1 сл.) точките $(x,y) \neq (0,0)$. Пресмятаме частните производни по обичайния начин:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x.\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + \left(x^2+y^2\right).\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.\left(-\frac{1}{2}\right).\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}.2x =$$

$$= 2x.\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}};$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y.\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + \left(x^2+y^2\right).\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.\left(-\frac{1}{2}\right).\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}.2y =$$

$$= 2y.\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

2 сл.) точката $(0,0)$. Ще пресметнем частните производни чрез определението:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \stackrel{def}{=} \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{|x|} = 0.$$

Аналогично,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \stackrel{def}{=} \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} y^2 \sin\frac{1}{|y|} = 0.$$

При пресмятане на двете граници се изполва факта, че функцията $\sin t$ е ограничена.

За да бъдат непрекъснати двете частни производни в точката $(0,0)$ е необходимо да са изпълнени равенствата

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

Да разгледаме частната производна

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x.\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Събираемото $2x.\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ клони към 0 при $(x,y)\to(0,0)$, тъй като $\sin t$ е ограничена функция.

За второто събираемо $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ обаче лесно може да се покаже, че не клони към 0 при $(x,y)\to(0,0)$. Например ако изберем редиците $x_n=\dfrac{1}{n}$ и $y_n=\dfrac{1}{n}$, то имаме, че $(x_n,y_n)\xrightarrow{n\to\infty}(0,0)$, но след заместване във второто събираемо се получава редицата

$$\frac{x_n}{\sqrt{x_n^2+y_n^2}}.\cos\frac{1}{\sqrt{x_n^2+y_n^2}}=\frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{1}{n}\right)^2}}.\cos\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{1}{n}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.\cos\frac{n}{\sqrt{2}},$$

която няма граница при $n\to\infty$. Следователно равенството $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$ не е изпълнено, т.е. частната производна $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ не е непрекъсната в точката $(0,0)$.

По аналогичен начин се показва, че и другата частна производна $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ не е непрекъсната в точката $(0,0)$.

За да завършим решението на задачата остава да докажем, че функцията $f(x,y)$ е диференцируема в точката $(0,0)$.

Първо пресмятаме пълното нарастване на функцията $f(x,y)$ в точката $(0,0)$:

$$\Delta f(0,0)=f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)=\left(\Delta x^2+\Delta y^2\right)\sin\frac{1}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}-0=$$

$$=\left(\Delta x^2+\Delta y^2\right).\sin\frac{1}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}.$$

Намираме функцията $\varepsilon(\Delta x,\Delta y)$ след заместване в равенството (3):

$$\varepsilon(\Delta x,\Delta y)=\Delta f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0).\Delta x-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0).\Delta y=$$

$$=\left(\Delta x^2+\Delta y^2\right).\sin\frac{1}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}-0.\Delta x-0.\Delta y=$$

$$=\left(\Delta x^2+\Delta y^2\right).\sin\frac{1}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}.$$

Накрая пресмятаме и границата

$$\lim_{\substack{\Delta x\to0\\ \Delta y\to0}}\frac{\varepsilon(\Delta x,\Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\lim_{\substack{\Delta x\to0\\ \Delta y\to0}}\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}.\sin\frac{1}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\overset{\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}{=}\lim_{\rho\to0}\rho.\sin\frac{1}{\rho}=0.$$

Следователно функцията $f(x,y)$ е диференцируема в точката $(0,0)$. $\square$

Задача 3. *Да се изследва за непрекъснатост и диференцируемост функцията*

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3x^3-2xy^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq0\\[2mm] 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

Решение. **Изследване за непрекъснатост.**

1 сл.) точките $(x,y)\neq(0,0)$. В този случай имаме, че $f(x,y)=\dfrac{3x^3-2xy^2}{x^2+y^2}$. Следователно функцията $f(x,y)$ е непрекъсната във всяка точка $(x,y)\neq(0,0)$ като частно на непрекъснати функции.

2 сл.) точката $(0,0)$. Функцията $f(x,y)$ е непрекъсната в точката $(0,0)$ тогава и само тогава, когато $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} f(x,y)=f(0,0)=0$.

За всяка точка $(x,y)\neq(0,0)$ са изпълнени неравенствата

$$0\le\left|\frac{3x^3-2xy^2}{x^2+y^2}\right|=\frac{\left|3x^3-2xy^2\right|}{\left|x^2+y^2\right|}=\frac{\left|3x^3-2xy^2\right|}{x^2+y^2}\le$$
$$\le\frac{\left|3x^3\right|+\left|2xy^2\right|}{x^2+y^2}=\frac{3\,|x|\,x^2}{x^2+y^2}+\frac{2\,|x|\,y^2}{x^2+y^2}\le\frac{3\,|x|\,x^2}{x^2}+\frac{2\,|x|\,y^2}{y^2}=3\,|x|+2\,|x|=5\,|x|\,.$$

Така получихме, че $0\le|f(x,y)|\le5\,|x|$ за всяка точка $(x,y)\neq(0,0)$. Тъй като очевидно функцията $5\,|x|$ клони към 0 при $(x,y)\to(0,0)$, то от Теоремата за двамата полицаи следва, че $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} f(x,y)=0$. Така доказахме, че функцията $f(x,y)$ е непрекъсната и в точката $(0,0)$.

Изследване за диференцируемост.

1 сл.) точките $(x,y)\neq(0,0)$. Пресмятаме частните производни в точка $(x,y)\neq(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\left(9x^2-2y^2\right)\left(x^2+y^2\right)-\left(3x^3-2xy^2\right).2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{3x^4+11x^2y^2-2y^4}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{-4xy.\left(x^2+y^2\right)-\left(3x^3-2xy^2\right).2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{-10x^3y}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

Ясно е, че частните производни $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ съществуват и са непрекъснати (като частно на непрекъснати функции) във всяка точка $(x,y)\neq(0,0)$. Тогава от достатъчното условие за диференцируемост следва, че функцията $f(x,y)$ е диференцируема във всяка точка $(x,y)\neq(0,0)$.

2 сл.) точката $(0,0)$. Първо чрез определението проверяваме дали съществуват частните производни на $f(x,y)$ в точката $(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\stackrel{def}{=}\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{3x^3}{x^2}-0}{x}=\lim_{x\to0}\frac{3x^3}{x^3}=3;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\stackrel{def}{=}\lim_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to0}\frac{\dfrac{0}{y^2}-0}{y}=0.$$

(Ако някоя от частните производни не съществува от необходимото условие за диференцируемост веднага би следвало, че функцията не е диференцируема.)

Пресмятаме пълното нарастване на функцията $f(x,y)$ в точката $(0,0)$:

$$\Delta f(0,0) = f(0+\Delta x, 0+\Delta y) - f(0,0) =$$
$$= \frac{3\Delta x^3 - 2\Delta x \Delta y^2}{\Delta x^2 + \Delta y^2} - 0 = \frac{3\Delta x^3 - 2\Delta x \Delta y^2}{\Delta x^2 + \Delta y^2}.$$

Заместваме в равенството (3) и за функцията $\varepsilon(\Delta x, \Delta y)$ получаваме

$$\varepsilon(\Delta x, \Delta y) = \Delta f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0).\Delta x - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0).\Delta y =$$
$$= \frac{3\Delta x^3 - 2\Delta x \Delta y^2}{\Delta x^2 + \Delta y^2} - 3.\Delta x - 0.\Delta y = \frac{-5\Delta x \Delta y^2}{\Delta x^2 + \Delta y^2}.$$

Разглеждаме границата

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\varepsilon(\Delta x, \Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{-5\Delta x \Delta y^2}{\left(\Delta x^2 + \Delta y^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

За да бъде функцията $f(x,y)$ диференцируема в точката $(0,0)$ трябва тази граница да е равна на 0. Обаче ако изберем например редиците $x_n = \frac{1}{n}$ и $y_n = \frac{1}{n}$, то имаме, че $(x_n, y_n) \xrightarrow{n\to\infty} (0,0)$, но

$$\frac{\varepsilon(x_n, y_n)}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2}} = \frac{-5x_n y_n^2}{\left(x_n^2 + y_n^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-5\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2}{\left(\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-\frac{5}{n^3}}{\frac{2\sqrt{2}}{n^3}} = -\frac{5}{2\sqrt{2}} \xrightarrow{n\to\infty} -\frac{5}{2\sqrt{2}} \neq 0,$$

т.е. $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\varepsilon(\Delta x, \Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \neq 0$. Следователно функцията $f(x,y)$ не е диференцируема в точката $(0,0)$. □