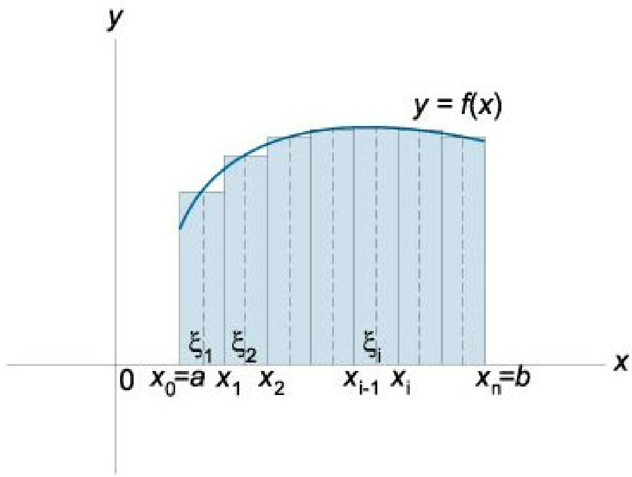
17. Определен интеграл - определение на Риман. Необходимо условие за интегруемост на функция

Погледнато назад в историята на математиката причина за въвеждането на определения интеграл е стремежа да се придаде строг смисъл на понятието лице на фигура. Като отправна точка може да се приеме лицето на правоъгълник, което е равно на произведението на дължините двете му страни. Ще се опитаме да сведем лицето на произволна фигура до сума от лицата на подходящо избрани правоъгълници.

17.1. Геометричен смисъл на определения интеграл. Определение на Риман.

Нека $f(x)$ е неотрицателна функция, дефинирана в интервала $[a, b]$. Поставяме си задача да намерим лицето на фигурата, заградена от абсцисната ос, графиката на функцията и двете вертикални прави през точките a и b.



Да разделим основата на фигурата, т.е. интервала $[a, b]$, на краен брой части (не е задължително частите да са с еднаква дължина) с помощта на делящите точки $x_0, x_1, \ldots, x_n$, като $x_0 = a$ и $x_n = b$. По този начин фигурата се разделя на краен брой вертикални ивици. Всяка от тях можем да заменим с близък по размери правоъгълник.

За височина на такъв правоъгълник можем да вземем стойността на функцията $f(x)$ в някоя произволна точка ξ_i от съответния интервал $[x_{i-1}, x_i]$. Тогава лицето на правоъгълника е равно на $f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$, а лицето на фигурата, съставена от всички правоъгълници, се получава чрез сумиране на всички събираеми от посочения вид при $i = 1, 2, \ldots, n$.

Интуитивно е ясно, че колкото по-малки са дължините на интервалите $[x_{i-1}, x_i]$, толкова повече новата фигура се доближава до дадената фигура, и съответно, лицето на новата фигура се доближава до търсеното от нас лице.

Определение 1. *Всяка крайна система от точки $x_0, x_1, \ldots, x_n$ такива, че $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ ще наричаме **разбиване** на интервала $[a, b]$. Разбиванията ще означаваме с τ, а точките, определящи разбиването, ще наричаме **делящи точки**.*

Определение 2. ***Диаметър** на разбиването τ ще наричаме числото*

$$\sigma(\tau) = \max_{1 \le i \le n} (x_i - x_{i-1}).$$

Във всеки един от интервалите $[x_{i-1}, x_i]$ на дадено разбиване $\tau : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ избираме точка $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Токите $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ наричаме **междинни точки** за разбиването τ.

Определение 3. ***Римановата интегрална сума** за функцията $f(x)$, съответстваща на разбиването τ на интервала $[a, b]$ и избраните междинни точки $\{\xi_i\}_{i=1}^n$ се определя с формулата*

$$R(f; \tau; \{\xi_i\}_{i=1}^n) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Да отбележим, че поради свободното избиране на междинните точки на всяко фиксирано развитие τ на интервала $[a, b]$ съответстват безброй много риманови интегрални суми. Често когато изборът на междинните точки не е от значение, римановите интегрални суми ще означаваме за краткост с $R_\tau(f)$.

Определение 4 (Определение на Риман за интеграл). *Ще казваме, че числото I е граница на римановите интегрални суми $R_\tau(f)$ на функцията $f(x)$ в интервала $[a, b]$ при $\sigma(\tau) \to 0$ (записваме $I = \lim\limits_{\sigma(\tau) \to 0} R_\tau(f)$), ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$ такова, че за всяко разбиване τ на интервала $[a, b]$ с диаметър $\sigma(\tau) < \delta$, е изпълнено $|R_\tau(f) - I| < \varepsilon$ (при произволен избор на междинните точки).*

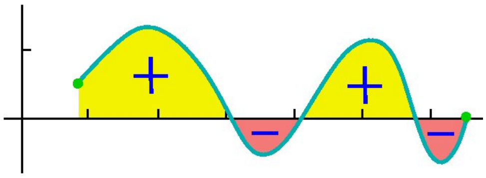
*Всяка функция $f(x)$, за която съществува така дефинираната граница на римановите интегрални суми, се нарича **интегруема** в интервала $[a, b]$. Границата*

I се нарича се нарича ***определен интеграл*** *от функцията $f(x)$ в интервала $[a, b]$ и се бележи с*

$$I = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Видяхме, че когато $f(x)$ е неотрицателна, геометричния смисъл на определения интеграл се дава от лицето на фигурата, намираща се под нейната графика. Общият случай може да се интерпретира по аналогичен начин.

Можем да разгледаме тези части от дефиниционния интервал, в които функцията е положителна и да вземем съответните лица със знак плюс, с към тях да прибавим със знак минус лицата, намиращи се под абсцисната ос, т.е. отговарящи на участъците, в които функцията е отрицателна. Полученото така число се нарича **ориентирано лице** на фигурата, заградена от абсцисната ос и графиката на функцията. Лесно е да се съобрази, че римановите интегрални суми на $f(x)$ дават приблизителна стойност на това число и следователно ориентираното лице представлява геометричната интерпретация на определения интеграл в общия случай.



17.2. Необходимо условие за интегруемост на функция.

Теорема 1. *Ако функцията $f(x)$ е интегруема в интервала $[a, b]$, то тя е ограничена в този интервал.*

Доказателство. Нека функцията $f(x)$ е интегруема в интервала $[a, b]$ и $I = \int_a^b f(x)\,dx$. Тогава за $\varepsilon = 1$ съществува $\delta > 0$ такова, че за всяко разбиване τ на интервала $[a, b]$, за което $\sigma(\tau) < \delta$, е изпълнено $|R_\tau(f) - I| < 1$, или записано по друг начин, $I - 1 < R_\tau(f) < I + 1$. Това означава, че множеството от всички риманови суми $R_\tau(f)$ е ограничено, когато $\sigma(\tau) < \delta$.

Нека сега да допуснем, че функцията $f(x)$ не е ограничена върху интервала $[a, b]$. Вземаме произволно разбиване $\tau : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Тогава съществува поне един интервал $[x_{j-1}, x_j]$, в който функцията $f(x)$ няма да бъде ограничена. Следователно можем да изберем редица от точки $\left\{\xi_j^{(k)}\right\}_k$ в този интервал такава, че $\left|f(\xi_j^{(k)})\right| > k$ за всяко $k = 1, 2, \ldots$. От тук е очевидно, че $\lim_{k\to\infty} f(\xi_j^{(k)}) = +\infty$.

Да фиксираме произволни точки ξ_i в останалите интервали на разбиването τ: $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i], i \neq j$. Тогава сумата

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

има фиксирана стойност.

Добавяйки към тази сума събираемото $f(\xi_j^{(k)})(x_j - x_{j-1})$ получаваме римановата сума

$$R(f;\tau;\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{j-1},\xi_j^{(k)},\xi_{j+1\ldots},\xi_n).$$

Изпълнено е, че

$$\lim_{k\to\infty} R(f;\tau;\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{j-1},\xi_j^{(k)},\xi_{j+1\ldots},\xi_n) =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left(f(\xi_j^{(k)})(x_j - x_{j-1}) + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \right) = +\infty.$$

Така получихме, че за произволно разбиване τ множеството от всички интегрални суми $R_\tau(f)$ е неограничено, включително и в случая, когато $\sigma(\tau) < \delta$. Достигнахме до противоречие, дължащо се на допускането, че функцията $f(x)$ не е ограничена върху интервала $[a,b]$. Следователно $f(x)$ е ограничена в интервала $[a,b]$. $\square$