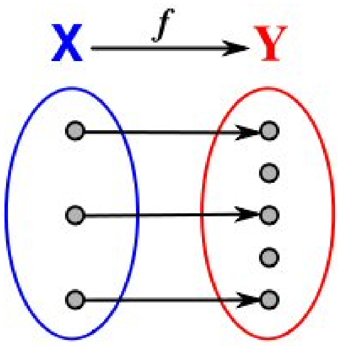
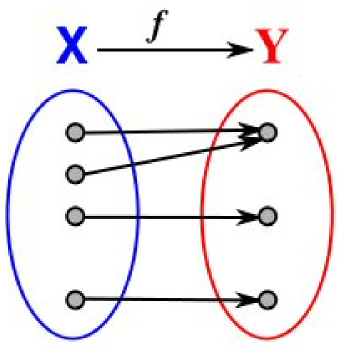
7. Понятие за обратна функция.
Основни елементарни функции

7.1. Инективни, сюрективни и биективни функции.

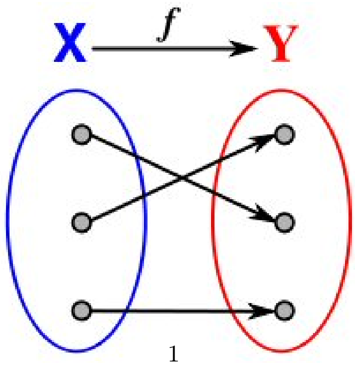
Определение 1. *Нека $X, Y \subset \mathbb{R}$. Функцията $f : X \to Y$ наричаме* ***инективна (или еднозначна)****, ако на различни точки от множеството X се съпоставят различни образи, т.е. $\forall x_1, x_2 \in X : x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq (x_2)$.*

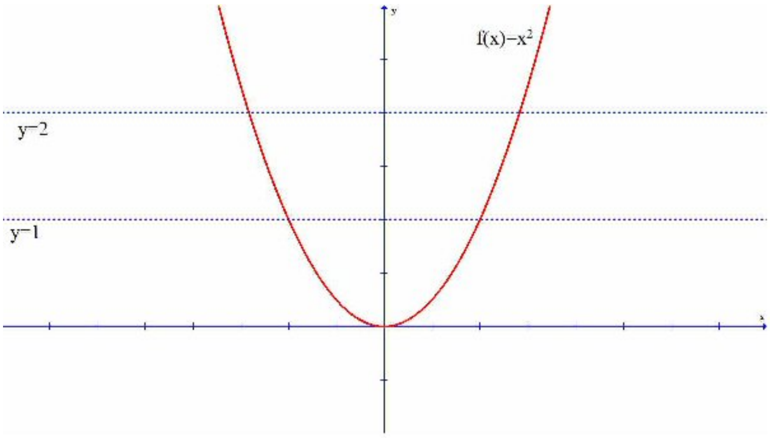


Определение 2. *Нека $X, Y \subset \mathbb{R}$. Функцията $f : X \to Y$ наричаме* ***сюрективна (или функция, изобразяваща X върху Y)****, ако за всяко $y \in Y$ съществува такова $x \in X$, че $y = f(x)$ (т.е. $f(X) = Y$).*



Определение 3. *Нека $X, Y \subset \mathbb{R}$. Функцията $f : X \to Y$ наричаме* ***биективна (или взаимно еднозначна)****, ако f е инективна и сюрективна.*





Като пример да разгледаме функцията $f(x) = x^2$.

1. $f : (-\infty, +\infty) \to (-\infty, +\infty)$. В този случай $f(x)$ не е инективна, защото за $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$ е изпълнено $x_1 \neq x_2$, но $f(x_1) = (-1)^2 = 1$ и $f(x_2) = 1^2 = 1$, т.е. $f(x_1) = (x_2)$. Също така $f(x)$ не е сюрективна, тъй като не съществува $x \in (-\infty, +\infty)$ такова, че $f(x) = x^2 = -1$.

2. $f : [0, +\infty) \to (-\infty, +\infty)$. Тук считаме, че $f(x) = x^2$ е дефинирана само върху неотрицателните реални числа. Сега вече $f(x)$ е инективна, защото за $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$, $x_1 \neq x_2$ имаме $f(x_1) \neq (x_2)$. Функцията $f(x)$ и в този случай не е сюрективна (виж 1.).

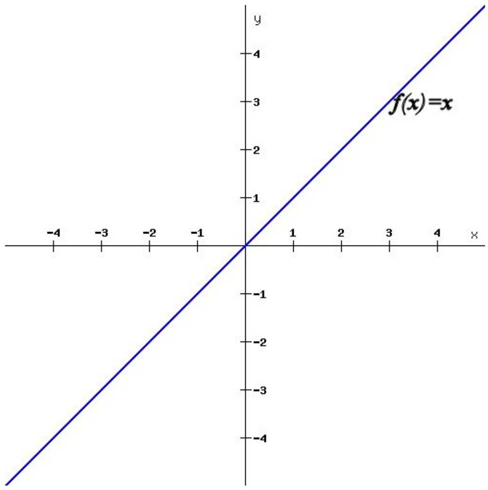
3. $f : (-\infty, +\infty) \to [0, +\infty)$. Сега $f(x) = x^2$ е дефинирана върху $\mathbb{R}$, но областта от стойности са неотрицателните реални числа. Както в 1. може да се види, че $f(x)$ не е инективна. Функцията $f(x)$ в този случай е сюрективна, тъй като за всяко $y \in [0, +\infty)$ можем да намерим $x \in \mathbb{R}$ (например $x = \sqrt{y}$) такова, че $f(x) = y$.

4. $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$. Функцията $f(x) = x^2$ е дефинирана върху неотрицателните реални числа и областта от стойности също са неотрицателните реални числа. Както в 2. може да се види, че $f(x)$ е инективна, а както в 3. - че е сюрективна. Следователно $f(x)$ в този случай е биективна.

Като пример за биективна функция, която е дефинирана върху $\mathbb{R}$ и областта и от стойности е отново $\mathbb{R}$ ($f : (-\infty, +\infty) \to (-\infty, +\infty)$), може да бъде разгледана $f(x) = x$:

1) ако $x_1 \neq x_2$, то $f(x_1) = x_1 \neq x_2 = f(x_2)$. Следователно $f(x)$ е инективна.

2) за всяко $y \in \mathbb{R}$ съществува $x \in \mathbb{R}$ ($x = y$) такова, че $y = f(x)$. Следователно $f(x)$ е сюрективна.



7.2. Понятие за обратна функция.

Нека $X, Y \subset \mathbb{R}$ и $f : X \to Y$ е биективна функция. Графично това можем да илюстрираме така: всяка точка $y \in Y$ е свързана с единствена съответна точка $x \in X$, такава, че $y = f(x)$. Съпоставяйки по този начин на всяко $y \in Y$ единственото $x \in X$, удовлетворяващо $y = f(x)$, получаваме нова функция, която се нарича **обратна функция** на f и се означава с f^{-1}. Очевидно е изпълнено, че

$$y = f(x) \Longleftrightarrow f^{-1}(y) = x,$$

$$f(f^{-1}(y)) = y \text{ за всяко } y \in Y,$$

$$f^{-1}(f(x)) = x \text{ за всяко } x \in X.$$

Да разгледаме графиките на функциите $f : X \to Y$ и $f^{-1} : Y \to X$. Графиката на $f(x)$ е множеството от точки

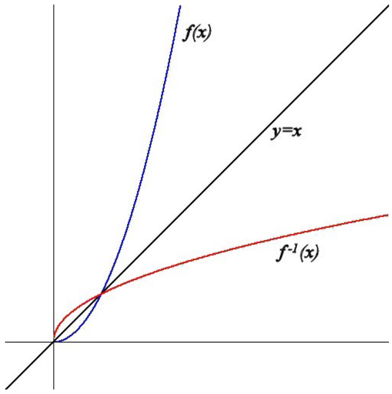
$$\Gamma_f = \{(x, f(x)), x \in X\},$$

а графиката на обратната функция $f^{-1}(y)$ е множеството от точки

$$\Gamma_{f^{-1}} = \left\{(y, f^{-1}(y)), y \in Y\right\} = \{(f(x), x), x \in X\}.$$

Да фиксираме произволно $x_0 \in X$. Разглеждаме отсечката с краища в точките $A(x_0, f(x_0)) \in \Gamma_f$ и $B(f(x_0), x_0) \in \Gamma_{f^{-1}}$. Средата на тази отсечка AB е точката $P\left(\frac{x_0+f(x_0)}{2}, \frac{f(x_0)+x_0}{2}\right)$, която очевидно лежи на правата $y = x$ (ъглополовящата на първи и трети квадрант). Чрез теоремата на Питагор лесно се проверява, че $\triangle OPA$ и $\triangle OPB$ са правоъгълни триъгълници, т.е. дължината на отсечката AP е разстоянието от т. A до правата $y = x$ и също така дължината на отсечката BP е разстоянието от т. B до правата $y = x$.

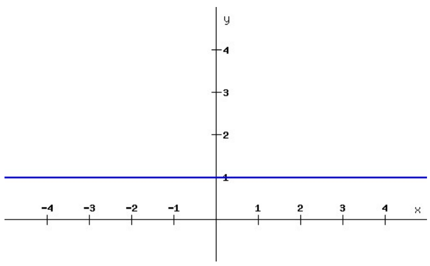
Изложеното по-горе означава, че графиката на функцията f и графиката на обратната функция f^{-1} са симетрични относно правата $y = x$ (ъглополовящата на първи и трети квадрант).



7.3. Основни елементарни функции.

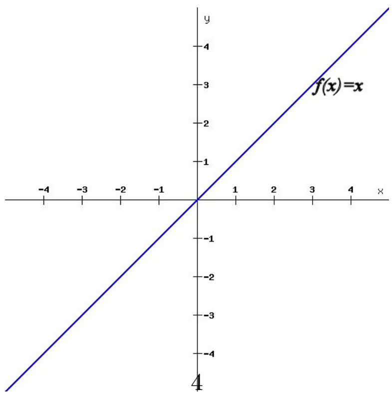
1) $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, - степенна функция. Ще разгледаме няколко случая за параметъра α.

а) $\alpha = 0$. В този случай $f(x) = x^\alpha = x^0 = 1$. Графиката на функцията представлява хоризонтална права.



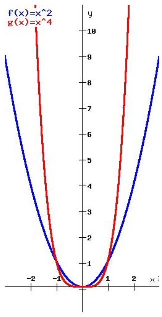
Дефиниционната област е $D_f = (-\infty, +\infty)$. Границите в двата края на дефиниционната област очевидно са равни на 1: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^\alpha = \lim\limits_{x\to\pm\infty} 1 = 1$.

б) $\alpha = 1$. В този случай $f(x) = x^\alpha = x^1 = x$. Графиката на функцията е правата $y = x$ - ъглополовящата на I и III квадрант.



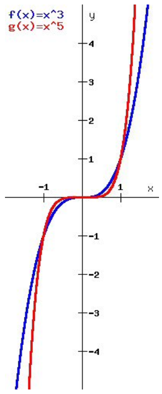
Дефиниционната област е $D_f = (-\infty, +\infty)$. Границите в двата края на дефиниционната област са: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^\alpha = \lim\limits_{x\to\pm\infty} x = \pm\infty$.

в) $\alpha = 2k, k \in \mathbb{N}$, т.е. α е четно естествено число. В този случай $f(x) = x^\alpha = x^{2k}$.



Дефиниционната област е $D_f = (-\infty, +\infty)$. Областта от стойности е $R_f = [0, +\infty)$. Границите в двата края на дефиниционната област са: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^\alpha = \lim\limits_{x\to\pm\infty} x^{2k} = +\infty$.

г) $\alpha = 2k+1, k \in \mathbb{N}$, т.е. α е нечетно естествено число, по-голямо от 1. В този случай $f(x) = x^\alpha = x^{2k+1}$.



Дефиниционната област е $D_f = (-\infty, +\infty)$. Областта от стойности е $R_f = (-\infty, +\infty)$. Границите в двата края на дефиниционната област са:

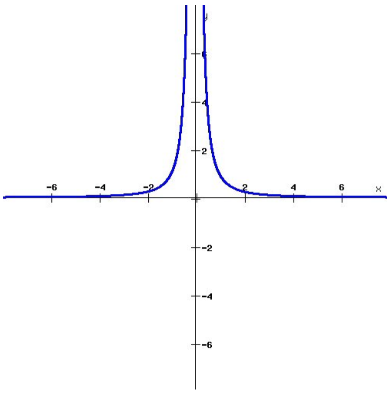
$$\lim_{x\to\pm\infty} x^\alpha = \lim_{x\to\pm\infty} x^{2k+1} = \pm\infty.$$

д) $\alpha = -2k, k \in \mathbb{N}$. В този случай $f(x) = x^\alpha = x^{-2k} = \dfrac{1}{x^{2k}}$.

Дефиниционната област е $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Областта от стойности е $R_f = (0, +\infty)$. Границите в краищата на дефиниционната област са:

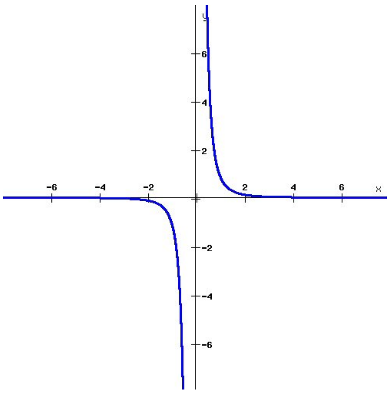
$$\lim_{x\to\pm\infty} x^\alpha = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^{2k}} = 0;$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} x^\alpha = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x^{2k}} = +\infty;$$



$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^\alpha = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x^{2k}} = +\infty.$$

е) $\alpha = -(2k-1), k \in \mathbb{N}$. В този случай $f(x) = x^\alpha = x^{-(2k-1)} = \dfrac{1}{x^{2k-1}}$.



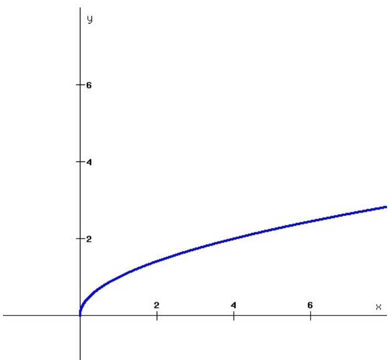
Дефиниционната област е $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Областта от стойности е $R_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Границите в краищата на дефиниционната област са:

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^\alpha = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^{2k-1}} = 0;$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} x^\alpha = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x^{2k-1}} = -\infty;$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^\alpha = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x^{2k-1}} = +\infty.$$

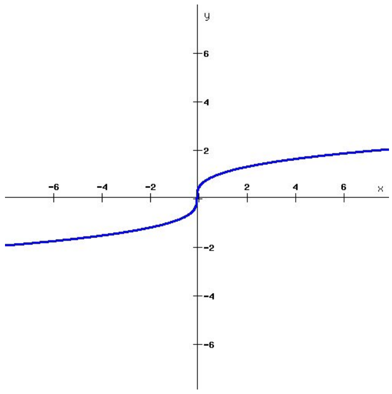
ж) $\alpha = \dfrac{1}{2k}, k \in \mathbb{N}$. В този случай $f(x) = x^\alpha = x^{\frac{1}{2k}} = \sqrt[2k]{x}$.



Дефиниционната област е $D_f = [0, +\infty)$. Областта от стойности е $R_f = [0, +\infty)$. Границата в десния край на дефиниционната област е:

$$\lim_{x \to +\infty} x^\alpha = \lim_{x \to +\infty} \sqrt[2k]{x} = +\infty.$$

з) $\alpha = \dfrac{1}{2k+1}, k \in \mathbb{N}$. В този случай $f(x) = x^\alpha = x^{\frac{1}{2k+1}} = \sqrt[2k+1]{x}$.

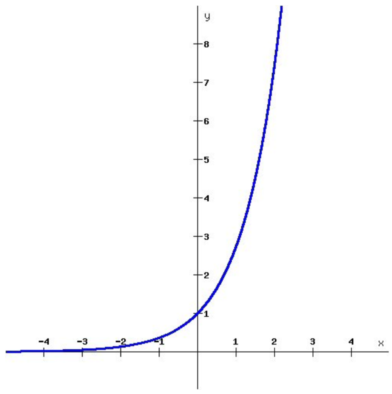


Дефиниционната област е $D_f = (-\infty, +\infty)$. Областта от стойности е $R_f = (-\infty, +\infty)$. Границите в краищата на дефиниционната област са:

$$\lim_{x \to \pm\infty} x^\alpha = \lim_{x \to \pm\infty} \sqrt[2k+1]{x} = \pm\infty.$$

2) $f(x) = a^x$, $a > 0, a \neq 1$, - показателна функция. Ще разгледаме два случая за параметъра a.

а) $a > 1$. В този случай графиката на функцията изглежда така:



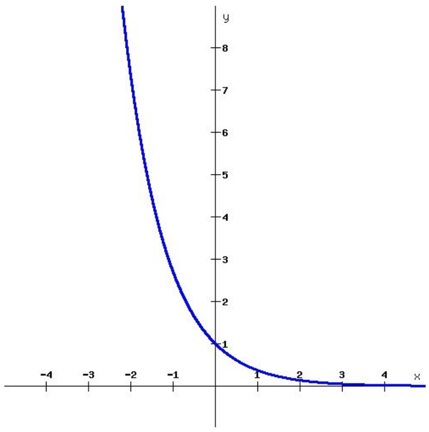
Дефиниционната област е $D_f = (-\infty, +\infty)$. Областта от стойности е $R_f = (0, +\infty)$. Границите в краищата на дефиниционната област са:

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty;$$

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0.$$

Към този подслучай спада и експоненциалната функция $y = e^x$.

б) $0 < a < 1$. В този случай графиката на функцията изглежда така:



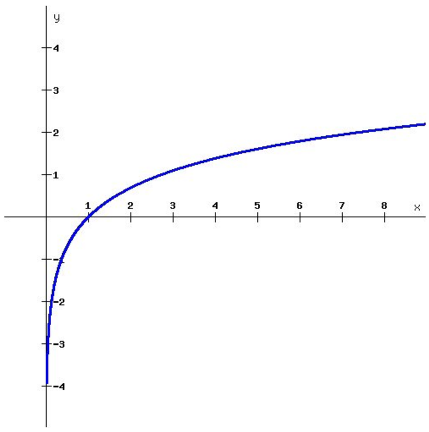
Дефиниционната област е $D_f = (-\infty, +\infty)$. Областта от стойности е $R_f = (0, +\infty)$. Границите в краищата на дефиниционната област са:

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = 0;$$

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty.$$

3) $f(x) = \log_a x$, $a > 0, a \neq 1$, - логаритмична функция. Отново ще разгледаме двата случая за параметъра a.

а) $a > 1$. В този случай графиката на функцията изглежда така:



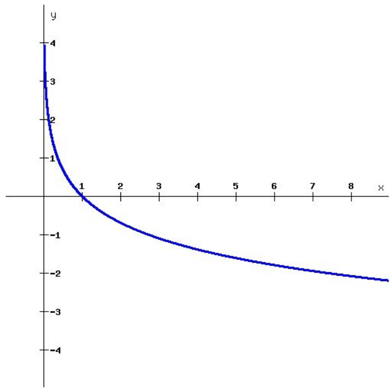
Дефиниционната област е $D_f = (0, +\infty)$. Областта от стойности е $R_f = (-\infty, +\infty)$. Границите в краищата на дефиниционната област са:

$$\lim_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty;$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \log_a x = -\infty.$$

Към този подслучай спада и натуралният логаритъм $y = \ln x = \log_e x$.

б) $0 < a < 1$. В този случай графиката на функцията изглежда така:

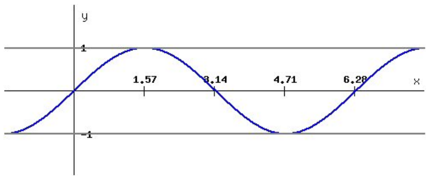


Дефиниционната област е $D_f = (0, +\infty)$. Областта от стойности е $R_f = (-\infty, +\infty)$. Границите в краищата на дефиниционната област са:

$$\lim_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty;$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \log_a x = +\infty.$$

4) $f(x) = \sin x$. Графиката на функцията се нарича синусоида:

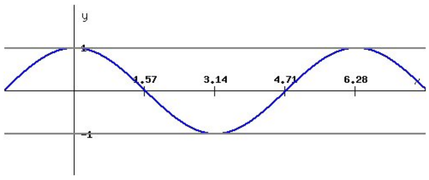


Дефиниционната област е $D_f = (-\infty, +\infty)$. Областта от стойности е $R_f = [-1, 1]$. Границите в двата края на дефиниционната област не съществуват. Това лесно може да се докаже чрез определението на Хайне.

Функцията $\sin x$ е периодична с период 2π, т.е. изпълнено е равенството

$$\sin x = \sin(x + 2k\pi), x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}.$$

5) $f(x) = \cos x$. Графиката има вида:

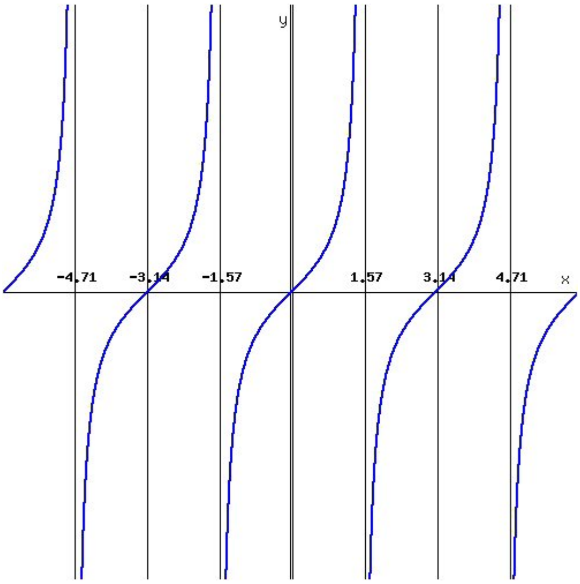


Дефиниционната област е $D_f = (-\infty, +\infty)$. Областта от стойности е $R_f = [-1, 1]$. Границите в двата края на дефиниционната област не съществуват, както при функцията $\sin x$.

Функцията $\cos x$ е периодична с период 2π, т.е. изпълнено е равенството

$$\cos x = \cos(x + 2k\pi), x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}.$$

6) $f(x) = \operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$. Графиката има вида:

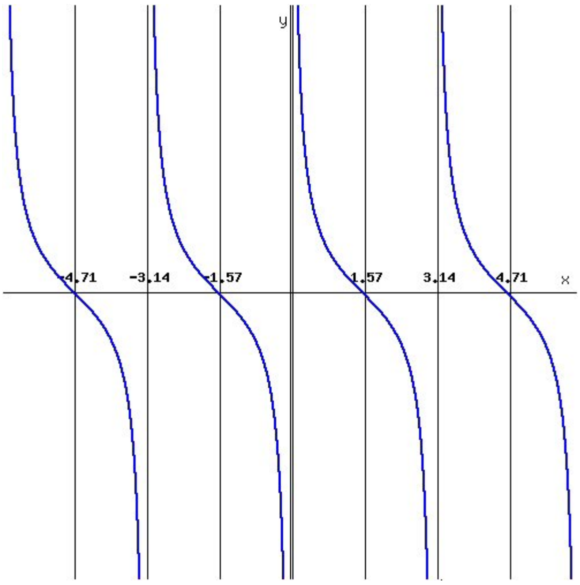


Дефиниционната област е $D_f = \{x \in \mathbb{R} : \cos x \neq 0\} = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$. Областта от стойности е $R_f = (-\infty, +\infty)$. Границите на функцията $\operatorname{tg} x$ в $-\infty$ и в $+\infty$ не съществуват.

Функцията $\operatorname{tg} x$ е периодична с период π, т.е. изпълнено е равенството

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x + k\pi), x \in D_f, k \in \mathbb{Z}.$$

7) $f(x) = \operatorname{cotg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$. Графиката има вида:

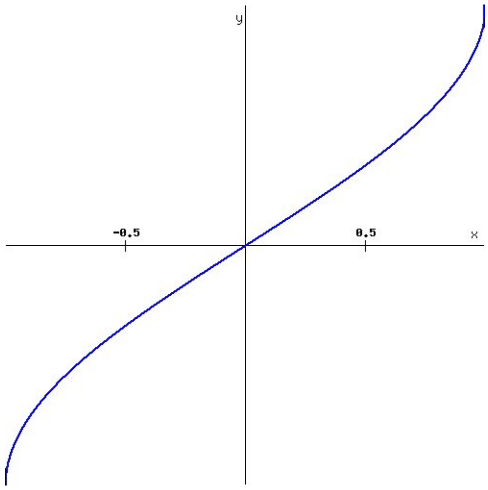


Дефиниционната област е $D_f = \{x \in \mathbb{R} : \sin x \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. Областта от стойности е $R_f = (-\infty, +\infty)$. Границите на функцията $\operatorname{cotg} x$ в $-\infty$ и в $+\infty$ не съществуват.

Функцията $\operatorname{cotg} x$ е периодична с период π, т.е. изпълнено е равенството

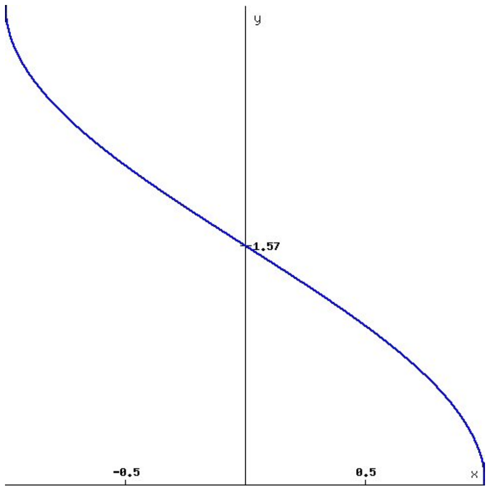
$$\operatorname{cotg} x = \operatorname{cotg}(x + k\pi), x \in D_f, k \in \mathbb{Z}.$$

8) $f(x) = \arcsin x$. Графиката на функцията е:



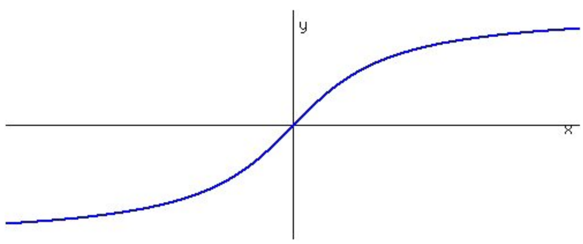
Дефиниционната област е $D_f = [-1, 1]$. Областта от стойности е $R_f = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

9) $f(x) = \arccos x$. Графиката има вида:



Дефиниционната област е $D_f = [-1, 1]$. Областта от стойности е $R_f = [0, \pi]$.

10) $f(x) = \operatorname{arctg} x$. Графиката има вида:

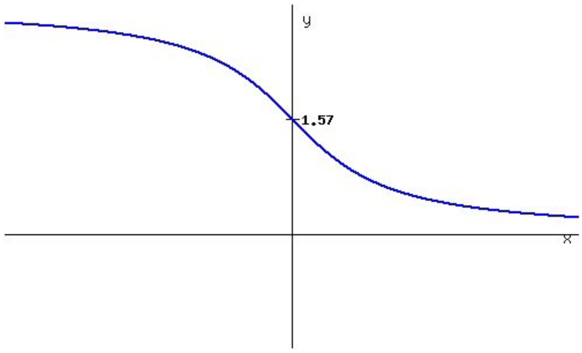


Дефиниционната област е $D_f = (-\infty, +\infty)$. Областта от стойности е $R_f = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Границите в краищата на дефиниционната област са:

$$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2};$$

$$\lim_{x \to -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}.$$

11) $f(x) = \operatorname{arccotg} x$. Графиката има вида:



Дефиниционната област е $D_f = (-\infty, +\infty)$. Областта от стойности е $R_f = (0, \pi)$. Границите в краищата на дефиниционната област са:

$$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{arccotg} x = 0;$$

$$\lim_{x \to -\infty} \operatorname{arccotg} x = \pi.$$