Задачи за **трети етап** (месец **април 2025**)
на **Турнира за купата на Декана по математика**

Задача 1.

1) Пресметнете границата

$$A = \lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{2n^3+n-10}{\sqrt{7}n^3+2n^2+1}\right)^n \sin(2025n)\right).$$

2) Докажете равенството

$$arctg\, x^{2025} + arctg\,\frac{1}{x^{2025}} = \frac{\pi}{2} - A$$

за $\forall x \in (0, +\infty)$, където A е границата в 1).

Задача 2.

Докажете че, ако a е цяло число, взаимно просто с 10, то за всяко естествено число n е в сила сравнението

$$a^{100n+1} \equiv a\ (1000)$$

Задача 3.

Даден е прав кръгов цилиндър с лице S на пълната му повърхнина. При какво отношение на дължините на диаметъра на основата и образователната цилиндърът ще има най-голям обем?