Задачи за **втори етап** (месец **април 2026**)
на **Турнира за купата на Декана по математика**

Задача 1.

Нека n е естествено число, което не се дели на 3. Докажете, че

$$n^{13} - n \equiv 0 \ (2^{13} - 2).$$

Задача 2.

Спрямо Декартова координатна система $K = Oxy$ в равнината са дадени елипсите ε_1 и ε_2 с уравнения $\varepsilon_1 \colon \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ и $\varepsilon_2 \colon 4x^2 + y^2 = 1$ и окръжност k с уравнение $k \colon x^2 + y^2 = 1$. През произволна точка от елипсата ε_1, различна от краищата на малката ѝ ос, са прекарани две допирателни към окръжността k. Докажете, че правата, свързваща допирните им точки с k, е допирателна на втората елипса ε_2.

Задача 3.

а) Докажете неравенството

$$\ln(x+1) - \frac{2}{3} + A \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}, \quad \forall\, x \geq 0,$$

където A е границата

$$A = \lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{12 - x} - 3}{2 - \sqrt{1 + x}}.$$

б) Изследвайте функцията

$$f(x) = \ln(x+1) - 3Ax$$

и начертайте графиката ѝ, ако константата A е от а).

Задача 4.

Да се докаже, че

$$\int_1^{10} x^x dx \ > \frac{10^{10}}{\ln 10 + \ 1}.$$