

Задачи за втори етап (месец март 2025)
на Турнира за купата на Декана по математика

Задача 1.

Изследвайте функцията

$$f(x) = \frac{x}{4} \operatorname{arctg} x + N^{2025}x + M$$

и начертайте графиката ѝ, ако константите M , N се определят по следния начин:

$$M = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^{2025}}{2024^{n+3} - 2025^n} \cdot (\cos(2025n) + \sin(2025n)) \right),$$

$$N = \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b},$$

където реалните числа a , b , c удовлетворяват равенството

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1.$$

Задача 2.

Нека $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$. Докажете, че за всяко естествено число n

е изпълнено равенството $A^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ na^{n-1} & a^n & 0 \\ \frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2} & na^{n-1} & a^n \end{pmatrix}$.

Задача 3.

Дадена е елипса k с канонично уравнение

$$k: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

спрямо ДКС $K = Oxy$. Намерете точка от елипсата k , лежаща в първи квадрант на K , така че допирателната към елипсата k в тази точка да образува с осите на координатната система триъгълник с минимално лице.