Задачи за **първи етап** (месец **март 2026**)
на **Турнира за купата на Декана по математика**

Задача 1.

Нека A е матрица с размер $n \times n$, x_1 и c са вектор-стълбове от $\mathbb{R}^n$. Дефинирана е редица от вектор-стълбове $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ по формулата
$x_{k+1} = Ax_k + c$. Ако матрицата A е горна триъгълна матрица с нулеви диагонални елементи, то да се докаже, че съществува индекс p, такъв че
$x_{p+1} = x_p$, т.е. x_p е решение на уравнението $x = Ax + c$.

Задача 2.

Нека P е произволна точка в равнината на триъгълник ABC. Дефинирана е функцията

$$f(P) = PA^2 + PB^2 + PC^2.$$

а) Намерете всички точки P, за които $f(P)$ е минимално.

б) Докажете, че за всяка точка P е в сила тъждеството

$$f(P) = f(G) + 3PG^2,$$

където G е медицентърът на триъгълника ABC.

в) Намерете минималната стойност на $f(P)$ и я изразете чрез дължините на страните на триъгълника.

Задача 3.

Решете уравнението $\begin{vmatrix} x^4+1 & x^2+1 & 17 \\ x^4+x^2 & x^2+x & 20 \\ x^4 & x^2 & 16 \end{vmatrix} = 0.$

Задача 4.

а) Пресметнете константите:

$$A = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^{2026}}{2025^{n+1}-2026^n}.\cos(2026n)\right) \text{ и } B = a^4 + b^4 + c^4,$$

където реалните числа a, b, c удовлетворяват равенствата:

$$a + b + c = 0 \text{ и } a^2 + b^2 + c^2 = 1.$$

б) Изследвайте функцията

$$f(x) = \sqrt{A + 1 + x^2} - 2Bx + A^2$$

и начертайте графиката ѝ, ако константите A и B са от а).