SOME PROBLEMS FOR TRAPEZOID AND CIRCLE

DIANA R. STEFANOVA **TATYANA ST. MADZHAROVA**

ABSTRACT: *Some problems for a trapezoid and a circle have been suggested, looking at different possible positions between them. The goal of this paper is to improve skills and increase students' interest in their mathematics education.*

KEYWORDS: *trapezoid, circle*

DOI: https://doi.org/10.46687/FPXE7716

НЯКОИ ЗАДАЧИ ЗА ТРАПЕЦ И ОКРЪЖНОСТ

ДИАНА Р. СТЕФАНОВА **ТАТЯНА СТ. МАДЖАРОВА**

АБСТРАКТ: Предложени са някои задачи за трапец и окръжност, като са разгледани различни взаимни положения между тях. Целта е усъвършенстване на уменията и повишаване интереса на учениците при обучението им по математика.

1 Въведение

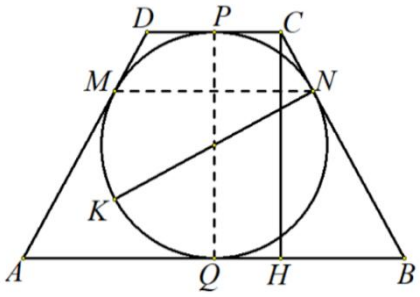
В настоящата работа ще споделим опита си с ученици, като акцента сме поставили на тези задачи по темата, които липсват или не са достатъчно застъпени в учебниците. Целта ни е да се систематизират и попълнят знанията им, а също така да се усъвършенстват уменията за решаване на задачи от трапец и окръжност, да се повиши нивото им на подготовка за различни математически състезания, конкурси, зрелостни изпити и други [1], [2], [3], [4] и [5]. В предложените задачи от трапец и окръжност са разгледани само: трапец вписан в окръжност; трапец описан около окръжност и окръжност, чиито диаметър е страна (бедро, малка основа и голяма основа) на трапец. Предлаганата разработка е подходяща за разширена или допълнителна подготовка и има за цел в едно сравнително елементарно изложение да запознае читателя с основните идеи, които се използват при решаването на задачи от трапец и окръжност. Тя, разбира се, съвсем не претендира за пълнота.

2 Трапец, описан около окръжност

Един трапец е описан около окръжност, тогава и само тогава, когато сборът на две негови срещуположни страни е равен на сбора на другите две страни. Центърът на тази окръжност е пресечна точка на ъглополовящите на ъглите на трапеца.

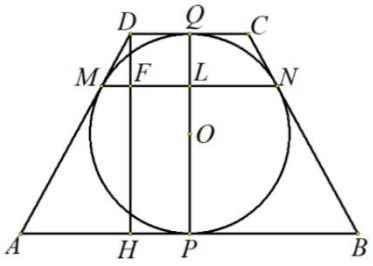
Задача 1. Около окръжност с радиус R е описан равнобедрен трапец. Лицето на четириъгълника, върховете на който са допирните точки на окръжността със страните на трапеца, е равно на S. Да се намери лицето на трапеца.

***Решение*:** Нека $ABCD$ е трапецът, описан около окръжността с радиус R. Означаваме с M, N, P и Q допирните точки на окръжността съответно със страните AD, BC, CD и AB. Построяваме диаметъра NK и височината $CH\left(H \in AB\right)$. Означаваме $MN = 2h, CN = a$ и $BN = b$. Правоъгълните триъгълници $\triangle NMK$ и $\triangle CHB$ са подобни, защото $\sphericalangle KMN = \sphericalangle CHB = 90°$ и $\sphericalangle MNK = \sphericalangle HCB$ (ъгли от един и същи вид с взаимно перпендикулярни рамене). Тогава $\frac{CH}{MN} = \frac{BC}{KN} \Leftrightarrow \frac{2R}{2h} = \frac{a+b}{2R}$, откъдето $a+b = \frac{(2R)^2}{2h}$. Четириъгълникът $MQNP$ е с взаимно перпендикулярни диагонали и лицето му е $S = \frac{1}{2}.2h.2R$, откъдето $2h = \frac{S}{R}$. Следователно $S_{ABCD} = \frac{AB+CD}{2}.CH = \frac{8R^4}{S}$. [2]



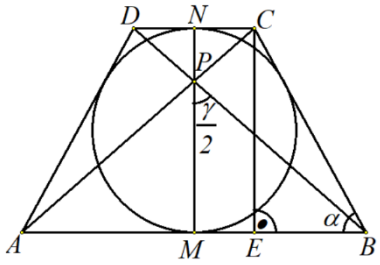
Задача 2. В равнобедрен трапец е вписана окръжност с радиус 5 cm. Да се намери лицето на трапеца, ако дължината на отсечката, съединяваща допирните точки на окръжността с бедрата на трапеца, е равна на 8 cm.

***Решение*:** Нека M и N са допирните точки на окръжността съответно с бедрата AD и BC на трапеца и точка O е центърът на вписаната окръжност. Построяваме $DH \perp AB\left(H \in AB\right)$. В $\Delta AHD, DH = 10\ cm$, $AD = \frac{a+b}{2}, AH = \frac{a-b}{2}$, където a и b са дължините на основите. Чрез питагоровата теорема от ΔAHD, намираме уравнението $ab = 100$. През центъра O построяваме диаметър, перпендикулярен на MN, който пресича голямата $\left(AB\right)$ и малката $\left(CD\right)$ основи съответно в точки P и Q. Двете хорди MN и PQ се пресечат в точка L. Тогава $QL.PL = ML.NL \Leftrightarrow QL\left(10 - QL\right) = 4^2 \Leftrightarrow QL = 2$ или $QL = 8$. Нека MN пресича DH в точка F. От подобието на триъгълниците ΔAHD и ΔMDF намираме още едно уравнение за a и $b\left(a = 4b\right)$. Като решим системата от двете уравнения, получаваме $a = 20, b = 5$, а лицето $S = 125$ cm^2. [1]



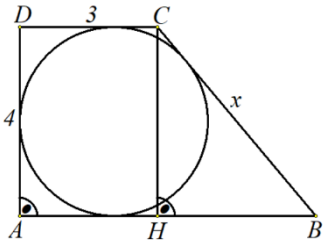
Задача 3. Равнобедрен трапец е описан около окръжност. Ъгълът при голямата му основа е α, ъгълът между диагоналите срещу основите му е γ. Да се докаже, че $\sin\alpha = \cot g\frac{\gamma}{2}$.

***Решение*:** Означаваме $AB=a$ и $CD=b$. От ΔPNC намираме, че $PN=NC.\cot g\frac{\gamma}{2}=\frac{b}{2}\cot g\frac{\gamma}{2}$, а от ΔPMB намираме, че $PM=MB.\cot g\frac{\gamma}{2}=\frac{a}{2}\cot g\frac{\gamma}{2}$. Тъй като $ABCD$ е описан равнобедрен трапец, то $BC=\frac{a+b}{2}$. Тогава $2r=PM+PN=\frac{a+b}{2}\cot g\frac{\gamma}{2}=CB.\cot g\frac{\gamma}{2}$. От друга страна, от правоъгълния Δ имаме $2r=CE=CB.\sin\alpha$ и следователно $\sin\alpha=\cot g\frac{\gamma}{2}$. [1].



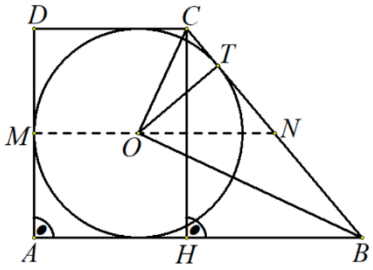
Задача 4. В правоъгълен трапец с дължини на малката основа и височината съответно 3 cm и 4 cm може да се впише окръжност. Намерете лицето на трапеца.

***Решение*:** Нека $ABCD$ е даденият трапец. От условието, че $ABCD$ е описан около окръжност, имаме $AB+CD=AD+BC$. Означаваме $BC=x$. Построяваме височината $CH\left(H\in AB\right)$. От правоъгълния триъгълник ΔHBC имаме $HB=\sqrt{x^2-16}$ и получаваме уравнението $3+\sqrt{x^2-16}+3=4+x,\ \left(AH+NB+DC=AD+BC\right)$, като използваме че $AH=DC=3$. Преобразуваме последователно и решаваме уравнението $\sqrt{x^2-16}=x-2\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x-2\geq 0\\ x^2-16=\left(x-2\right)^2\end{vmatrix}\Leftrightarrow x=5$. Тогава $AB=AH+HB=6$ и намираме, че лицето на трапеца е $S_{ABCD}=\frac{AB+CD}{2}.CH=18$ cm^2. [4].



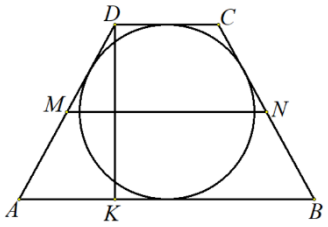
Задача 5. В правоъгълен трапец $ABCD$ $(AB\parallel CD, AB\perp AD)$ е вписана окръжност. Разстоянията от върховете B и C до центъра на окръжността са p и q. Намерете лицето на трапеца.

***Решение*:** От правоъгълния ΔBOC (BO и CO са ъглополовящи на прилежащи ъгли) и $S_{\triangle BOC}=\frac{OB.OC}{2}=\frac{BC.OT}{2}$ намираме $r=\frac{pq}{\sqrt{p^2+q^2}}$, а след това и медианата му $ON=\frac{\sqrt{p^2+q^2}}{2}$. Тогава $MN=OM+ON=\frac{pq}{\sqrt{p^2+q^2}}+\frac{\sqrt{p^2+q^2}}{2}=\frac{\left(p+q\right)^2}{\sqrt{p^2+q^2}}$. За лицето на трапеца получаваме $S=MN.2r=\frac{pq\left(p+q\right)^2}{p^2+q^2}$. [3].



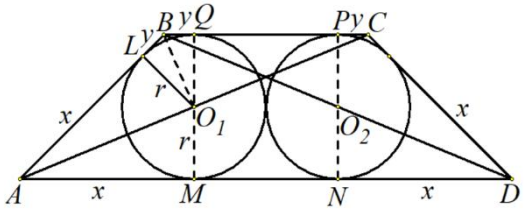
Задача 6. В равнобедрения трапец $ABCD$ средната отсечка има дължина 5 cm и разделя трапеца на части, чиито лица са в отношение $7:13$. Ако в трапеца може да се впише окръжност, то да се намери лицето му.

***Решение*:** Означаваме $AB=a, CD=b, AD=BC=c.$ По условие $MN=\frac{a+b}{2}=5,$ т.е. $a+b=10.$ Условието $a+b=2c,$ да може да се впише окръжност ни дава $c=5.$ Лицата на трапеците $MNCD$ и $ABNM$ са съответно $\frac{5+b}{2}.\frac{h}{2}$ и $\frac{a+5}{2}.\frac{h}{2},$ където $h=DK$ е височината на трапеца $ABCD.$ По условие отношението на тези лица е $\frac{5+b}{a+5}=\frac{7}{13}.$ От системата уравнения $a+b=10$ и $\frac{5+b}{a+5}=\frac{7}{13}$ намираме, че $a=8$ и $b=2.$ Тъй като $ABCD$ е описан равнобедрен трапец, то $AB+CD=AD+BC,$ то $BC=AD=5$ и $AK=3.$ От правоъгълния ΔAKD се намира $h=4,$ тогава лицето на трапеца е $S=20$ cm^2. [1].



Задача 7. Върху диагонала AC на изпъкнал четириъгълник $ABCD$ лежи центърът на окръжност с радиус $r,$ която се допира до страните AB, AD и $BC.$ Върху диагонала BD се намира центърът на окръжност с радиус $r,$ допираща се до страните BC, CD и $AD.$ Да се намери лицето на $ABCD,$ ако се знае още, че споменатите окръжности се допират външно.

***Решение*:** Лесно се съобразява, че страните AD и BC са общи допирателни на две еднакви допиращи се окръжности. От това следва, че $ABCD$ е трапец. Понеже AC е ъглополовяща на $\sphericalangle A,$ то $AB=BC=CD.$ Правоъгълен е $\triangle AO_1B$ и $r^2=xy,$ където $AM=AL=x$ и $BL=BQ=y.$ Тъй като $AB=BC,$ то $x+y=2r+2y.$ Така за неизвестните x и y се получава системата $\begin{vmatrix} xy=r^2 \\ x=2r+y \end{vmatrix},$ откъдето $\begin{vmatrix} x=r\left(\sqrt{2}+1\right) \\ y=r\left(\sqrt{2}-1\right) \end{vmatrix}.$ Тогава за лицето на трапеца се получава $S_{ABCD}=4r^2\left(1+\sqrt{2}\right).$ [5].



3 Трапец, вписан в окръжност

Един трапец е вписан в окръжност, тогава и само тогава, когато сборът на срещуположните му ъгли е 180°. Центърът на тази окръжност е пресечна точка на симетралите на страните на трапеца.

Ако един трапец е вписан в окръжност, то той е равнобедрен.

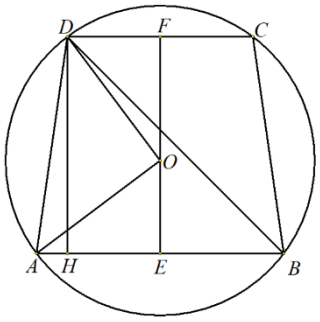
Един трапец е вписан в окръжност, ако е изпълнено равенството $OA.OC=OB.OD,$ където O е пресечната точка на диагоналите му.

Един трапец е вписан в окръжност, ако е изпълнено равенството $MA.MB=MC.MD,$ където M е пресечната точка на продълженията на срещуположните му страни AB и $CD.$

Нека точките C и D лежат в една и съща полуравнина относно правата AB и „виждат“ отсечката AB под един и същи ъгъл. Тогава четирите точки A, B, C, D лежат на една окръжност.

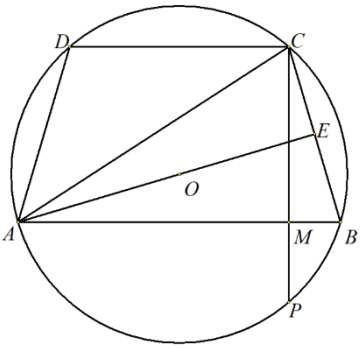
Задача 8. Центърът на окръжността, описана около трапец, дели височината му в отношение $3:4.$ Намерете основите на трапеца, ако радиусът на окръжността е 10 и средната му отсечка е равна на височината.

***Решение*:** От това, че $h=\frac{a+b}{2}=BH$ разбираме, че $\triangle ABD$ е равнобедрен и правоъгълен, а оттам $\sphericalangle ABD=45^\circ$ но $\triangle ABD$ е вписан, а $\sphericalangle AOD$ е централен, т.е. $\sphericalangle AOD=90^\circ$ Нека $\sphericalangle AOE=\alpha$ тогава $\sphericalangle DOF=90^\circ-\alpha.$ Имаме $\cos\alpha=\frac{OE}{OA}$, $\cos\left(90^\circ-\alpha\right)=\frac{OF}{OD}=\sin\alpha.$ Получаваме $tg\alpha=\frac{OF}{OE}=\frac{4}{3}.$ Тогава $\sin\alpha=\frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}=\frac{4}{5}$ и $\cos\alpha=\frac{3}{5}.$ Пресмятаме $\frac{a}{2}=R\sin\alpha=8$ и $\frac{b}{2}=R\cos\alpha=6,$ откъдето намираме, че $a=16$ и $b=12.$ [2]



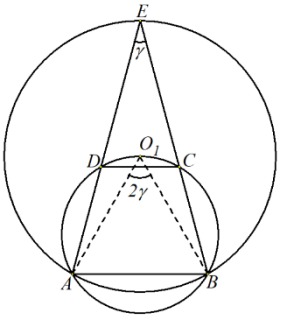
Задача 9. В окръжност е вписан трапец *ABCD*. Диаметърът ѝ през върха *A* е перпендикулярен на бедрото *BC*. През върха *C* е спуснат перпендикуляр към *AB*, който я пресича в точка *M*, а окръжността – в точка *P* така, че $CM:MP=5:2.$ Намерете тангенса на ъгъла при основата на трапеца.

***Решение*:** Щом диаметърът *AE* е перпендикулярен на хордата *BC*, той минава през средата ѝ и следователно ΔACB е равнобедрен. Нека $\sphericalangle ABC=\beta$ тогава $\sphericalangle BAE=\sphericalangle BCP=90^\circ-\beta$ но $\sphericalangle BCP=\sphericalangle BAP$ (като вписани) и следователно $\sphericalangle PAB=90^\circ-\beta$ Имаме $tg\sphericalangle CAM=tg\left(180^\circ-2\beta\right)=\frac{CM}{AM},$ $tg\left(90^\circ-\beta\right)=\frac{MP}{AM}$ или $\frac{-tg2\beta}{\cot g\beta}=\frac{5}{2}.$ От формулата $tg2\beta=\frac{2tg\beta}{1-tg^2\beta}$ получаваме $\frac{2tg^2\beta}{tg^2\beta-1}=\frac{5}{2},$ а оттам и $tg\beta=\sqrt{5}.$ [4].



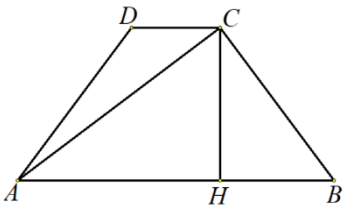
Задача 10. Бедрата *AD* и *BC* на трапец са продължени до пресичането им в точка *E*. Точката O_1 е център на описаната около $\triangle ABE$ окръжност. Намерете ъгъла при върха *A*, ако точките A,B,C,D и O_1 лежат на една окръжност с радиус $\sqrt{3}$ пъти по-малък от радиуса на описаната около $\triangle ABE$ окръжност. [5]

***Решение*:** Трапецът е равнобедрен, следователно и $\triangle ABE$ е равнобедрен. Ако означим $\sphericalangle AEB=\gamma$ то като централен $\sphericalangle AO_1B=2\gamma$ По синусова теорема имаме $AB=2R_1\sin\gamma$ и $AB=2R\sin2\gamma.$ Получихме, че $2\sqrt{3}R\sin\gamma=2R.2\sin\gamma\cos\gamma$ или $\cos\gamma=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\gamma=30^\circ$ и $\sphericalangle BAD=75^\circ$



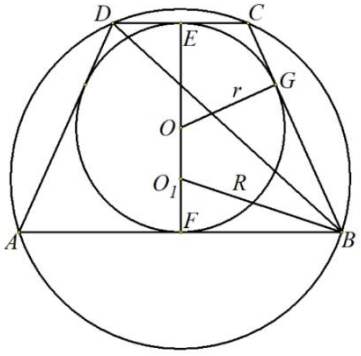
Задача 11. Даден е трапец *ABCD* като *AB* ∥ *CD*. Диагоналите *AC* и *BD* сключват с по-голямата основа *AB* равни ъгли, т.е. $\sphericalangle ADB=\sphericalangle ACB$. Ако *AB* = 25, *CD* = 7 и *AC* = 20, то намерете лицето на трапеца.

***Решение*:** Точките *C* и *D* лежат от една и съща страна на правата *AB* (двете са върхове на по-малката основа, разположена над *AB*). Отсечката *AB* се вижда от тях под равни ъгли: $\sphericalangle ADB = \sphericalangle ACB$. Според обратната теорема за вписани ъгли (геометрично място на точки, от които дадена отсечка се вижда под равен ъгъл), точките *C* и *D* лежат на една дъга над *AB*. Следователно четирите точки *A, B, C, D* лежат на една окръжност, т.е. *ABCD* е вписан. Тъй като *ABCD* е вписан в окръжност, значи е равнобедрен. Оттук и диагоналите са равни: *BD* = *AC* = 20. Тъй като трапецът е равнобедрен, проекциите на бедрата върху *AB* са равни: $p = \frac{AB - CD}{2} = 9.$ Разглеждаме диагонала *AC* = 20. Петата на височината от върха *C* отстои от *A* на разстояние *AB* − *p* = 25 − 9 = 16. От правоъгълния триъгълник с катет 16 и хипотенуза *AC* = 20 намираме, че височината е *h* = *12*. Лицето на трапеца е $S = \frac{AB + CD}{2}.h = 192.$



Задача 12. (ВВМУ, 1999 г.) Даден е трапец, в който е вписана окръжност и около който е описана окръжност. Отношението на височината на трапеца към радиуса на описаната окръжност е равно на $\sqrt{\frac{2}{3}}$. Намерете ъглите на трапеца.

***Решение*:** Нека трапеца е $ABCD, AB > DC, \sphericalangle BAD = \alpha \Rightarrow 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Тъй като трапеца е равнобедерен по условие, то $\sphericalangle CBA = \sphericalangle BAD = \alpha$ и $\sphericalangle BCD = \sphericalangle ADC = \pi - \alpha$. Ще изразим по два начина дължината на отсечката BD чрез α, R и r. Тъй като $\sphericalangle BAD$ е вписан в голямата окръжност и се измерва с $\overset{\frown}{BD}$, то $BD = 2R\sin\alpha, EF = 2r$. От условието на задачата $\frac{2r}{R} = \sqrt{\frac{2}{3}}$ или $R = r\sqrt{6}$. Тогава $BD = 2\sqrt{6}.r.\sin\alpha$. Тъй като окръжност с център O се допира до страните CD, BC, AB, то правите са ъглополовящи съответно на $\sphericalangle ADC, \sphericalangle DCB, \sphericalangle CBA$. Затова $DC = DE + EC = r\,cot\,g\frac{\sphericalangle ADC}{2} + r\,cot\,g\frac{\sphericalangle DCB}{2} = 2rtg\frac{\alpha}{2}$.



$$BC = CC_1 + C_1B = r\,cot\,g\frac{\sphericalangle DCB}{2} + r\,cot\,g\frac{\sphericalangle CBA}{2} = \frac{2r}{\sin\alpha}.$$

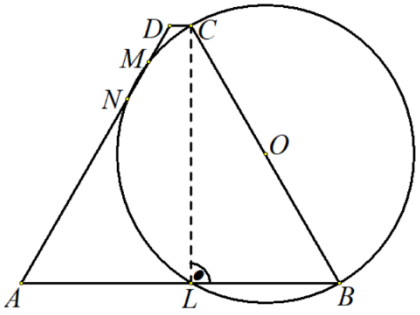
За $\triangle BCD$ прилагаме косинусова теорема $BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2BC.CD.cos\sphericalangle BCD$ намираме, че $BD^2 = 4r^2\left(1 + \frac{1}{sin^2\alpha}\right)$. Като приравним изразите за BD, получаваме уравнението $1 + \frac{1}{sin^2\alpha} = 6\,sin^2\alpha$, с корени $sin^2\alpha = -\frac{1}{3}$ (което няма решение) и $sin^2\alpha = \frac{1}{2}$. От $sin^2\alpha = \frac{1}{2}$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ намираме, че $\alpha = \frac{\pi}{4}$, тогава $\sphericalangle BAD = \sphericalangle CDA = \frac{\pi}{4}$ и $\sphericalangle BCD = \sphericalangle ADC = \frac{3\pi}{4}$. [1]

4 Окръжност, чиито диаметър е страна на трапец

Разгледани са диаметър е бедро, малка основа и голяма основа.

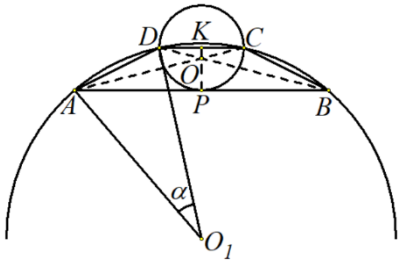
Задача 13. За равнобедрения трапец $ABCD$ е дадено, че $AB=15, CD=1, AD=BC=14$. Окръжност с диаметър BC пресича AD в точките M и N, като N е между A и M. Да се намерят дължините на отсечките AM и MN.

***Решение*:** Нека означим $AM=x$ и след това пресмятаме $cos\sphericalangle ABC=\frac{BL}{BC}=\frac{a-b}{2c}=\frac{1}{2}\Rightarrow\sphericalangle ABC=60°$. Прилагаме косинусова теорема за $\triangle ABM$ и $\triangle ACDM$, т.е. $BM^2=15^2+x^2-2.15.x.\frac{1}{2}$ и $CM^2=1^2+(14-x)^2-2.1.(14-x).\left(-\frac{1}{2}\right)$, след което ги заместваме в равенството $BM^2+CM^2=BC^2$ (Питагорова теорема в $\triangle BCM$)и намираме, че $x_1=12, x_2=10$. Прилагайки $AN.AM=AL.AB$ установяваме, че $AM=12, AN=10, MN=2$.



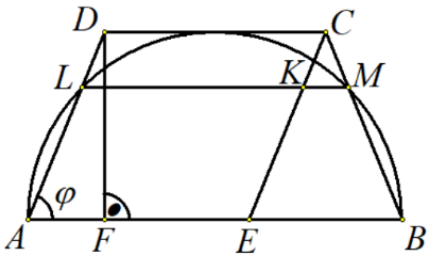
Задача 14. В равнобедрения трапец $ABCD$ малката основа CD е диаметър на окръжност, допираща се до голямата му основа AB. Пресечната точка на диагоналите му дели височината, минаваща през нея в отношение 3:1. Намерете тангенса на ъгъла, под който бедрото на трапеца се вижда от центъра на описаната около него окръжност.

***Решение*:** Нека KP е височина на трапеца, O е пресечна точка на диагоналите, $\triangle DCP$ равнобедрен и правоъгълен $\Rightarrow KP=DK; OP=3.OK$. Тогава $KP=4OK$. От $\triangle DKO$ получаваме $tg(\sphericalangle KDO)=\frac{1}{4}$. Нека α е търсения ъгъл. Тогава $\alpha=2\sphericalangle DBA$, но $\sphericalangle DBA=\sphericalangle KDO\Rightarrow tg\alpha=\frac{8}{15}$.

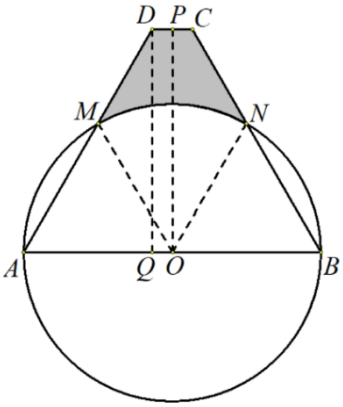


Задача 15. (ВИАС, 1995 г.) Даден е трапец $ABCD$. Голямата основа AB е диаметър на окръжност, която се допира до основата CD и пресича бедрата AD и BC съответно в точки L и M, като $\frac{BM}{MC}=\frac{AL}{LD}=k$. Докажете, че трапеца $ABCD$ е равнобедрен и ако $\varphi=\sphericalangle BAD$, да се изрази $cos\,2\varphi$ като функция на k.

***Решение*:** Нека $CE \parallel AD$ и пресича LM в точка K. Имаме $\frac{EK}{KC}=\frac{AL}{LD}=\frac{BM}{MC}$. Тогава от обратната теорема на Талес следва, че $KM \parallel EB$, т.е. $LM \parallel AB$. Тъй като успоредни хорди отсичат равни дъги, то $AL=BM$, т.е. трапецът $ABML$ е равнобедрен. Тогава и трапецът $ABCD$ е равнобедрен. От правоъгълните $\triangle ABL$ и $\triangle ADF$ имаме $cos\,\varphi=\frac{AL}{2R}, sin\,\varphi=\frac{R}{AD}$, където R е радиусът на полуокръжността. Тогава $sin\,2\varphi=2\,sin\,\varphi\,cos\,\varphi=\frac{AL}{AD}=\frac{AL}{AL+LD}=\frac{k.LD}{k.LD+LD}=\frac{k}{k+1}$. Тъй като дъгата LMB отговаря на централен ъгъл, който е по-голям от 90°, то $\varphi>45°$. Тогава $2\varphi>90°$ и $cos\,2\varphi<0$. Следователно $cos\,2\varphi=-\sqrt{1-sin^2\,2\varphi}=-\frac{\sqrt{2k+1}}{k+1}$.



Задача 16. За голяма основа на равнобедрен трапец служи диаметър на окръжност с радиус R. Трапецът има височина $h = \frac{3}{2}R$ и ъгъл при голямата основа 60°. Да се намери лицето на частта от трапеца, лежаща вън от кръга.



***Решение*:** Нека бедрата AD и BC на трапеца пресичат полуокръжността в точките M и N. Тъй като $AO = OM = R$ и $\sphericalangle OAM = 60°$, то $\triangle AOM$ е равностранен с дължина на страната R и лице $\frac{R^2\sqrt{3}}{4}$. Същите изводи са в сила и за $\triangle OBN$. Секторът OMN, тъй като $\sphericalangle MON = 60°$, има лице, равно на $\frac{1}{6}$ от лицето на кръга, т.е. $\frac{1}{6}\pi R^2$. От правоъгълния $\triangle AQD$ имаме $h = DQ = \frac{3}{2}R, AQ = htg30° = \frac{\sqrt{3}}{2}R$. Тогава като съобразим, че $DC = 2.DP = 2.QO = = 2(R - AQ) = \left(2 - \sqrt{3}\right)R$ и лицето на трапеца е $S_{ABCD} = \frac{3}{4}\left(4 - \sqrt{3}\right)R^2$. За лицето на частта от трапеца, лежаща вън от кръга, се получава $S = S_{ABCD} - S_{\triangle AOM} - S_{\triangle OBN} - S_{\triangle OMN} = \frac{1}{4}\left(12 - 5\sqrt{3}\right)R^2 - \frac{1}{6}\pi R^2$. [5].

5 Заключение

В настоящата статия представихме някои задачи от трапец и окръжност, като са разгледани различни взаимни положения между тях, а именно: трапец вписан в окръжност; трапец описан около окръжност и окръжност, чиито диаметър е страна (бедро, малка основа и голяма основа) на трапец. Практиката показва, че така разработената тема допринася за формиране на интерес към темата, респективно към математиката. Учениците установиха, че математическите знания са много важни, което им дава възможност да се справят с разглежданите задачи в темата. Всичко това ги мотивира и допринесе за тяхното логическо мислене за формиране на по-задълбочени знания и по-високи резултати на математически състезания, олимпиади и други.

ЛИТЕРАТУРА:

[1] Паскалев, Г., Сборник от задачи по математика. Планиметрия. Регалия 6, София (1999).

[2] Пачев, Хр., Планиметрията в примери и задачи, Лодос, София (2005).

[3] Портев, Л. и др., Математика, Летера, Пловдив (2004).

[4] Русев, Р., Тестове по математика за подготовка за държавен зрелостен изпит. СД „Недкова & Математика“, София (2008).

[5] Шаригин, Ф., Задачи по планиметрия, Интеграл, Добрич (2005).

Диана Стефанова
Факултет по икономика, Университет по хранителни технологии, гр Пловдив, бул. „Марица“ 26,
d_stefanova@uft-plovdiv.bg
Татяна Маджарова
Факултет Инженерен, ВВМУ „Н. Й. Вапцаров“, гр. Варна, ул. „Васил Друмев“ №73,
tmadjarova@gmail.com