MATHEMATICAL TOOLKIT AS A FACTOR IN THE DEVELOPMENT OF MATHEMATICAL THINKING: A COMPARATIVE ANALYSIS OF UPPER-SECONDARY CURRICULAR FRAMEWORKS IN BULGARIA AND SPAIN

IVAYLO A. DIMITROV **MIROSLAV K. HRISTOV**

ABSTRACT: *The paper examines the mathematical toolkit as a curricular and methodological factor in strategy choice and mathematical thinking. Official Bulgarian and Spanish upper-secondary frameworks are compared by five criteria: scope of content, proof, modelling and strategy choice, representations, and digital tools and assessment. The Bulgarian profile largely stops at the scalar product and derivative-based study of a limited class of functions, without matrices, determinants, or integral calculus. The Spanish Matemáticas I–II curriculum therefore provides a broader curricular toolkit. This advantage is treated as an opportunity for strategy choice, not as direct evidence of superior classroom practice. An integrative model is illustrated by an optimization problem and a problem involving skew lines. A quasi-experimental design for subsequent verification is outlined; no quantitative findings are reported.*

KEYWORDS: *mathematical toolkit, mathematical thinking, non-routine problems, strategic flexibility, upper-secondary mathematics, Bulgaria, Spain, vector product*

DOI: https://doi.org/10.46687/OROR5386

МАТЕМАТИЧЕСКИЯТ ИНСТРУМЕНТАРИУМ КАТО ФАКТОР ЗА ФОРМИРАНЕ НА МАТЕМАТИЧЕСКОТО МИСЛЕНЕ: СРАВНИТЕЛЕН АНАЛИЗ НА НОРМАТИВНИТЕ РАМКИ В БЪЛГАРИЯ И ИСПАНИЯ[*]

ИВАЙЛО А. ДИМИТРОВ **МИРОСЛАВ К. ХРИСТОВ**

АБСТРАКТ: *Статията разглежда математическия инструментариум като фактор за избора на стратегия и математическото мислене. Съпоставени са официалните рамки за гимназиалния етап в България и Испания по пет критерия. Българският профил при векторите достига главно до скаларно произведение, а при анализа – до производни и ограничен клас функции; матрици, детерминанти и интегрално смятане не са включени. Испанските Matemáticas I–II осигуряват по-широк инструментариум и повече възможности за избор, без това да доказва по-добра практика във всяка класна стая. Моделът е илюстриран с екстремална задача и задача за кръстосани прави. Очертан е проект за последваща квазиекспериментална проверка; количествени резултати не се представят.*

1 Увод

При нестандартната математическа задача условието обикновено не посочва пряко нито метода, нито последователността от действия. Ученикът трябва да разпознае структурата, да избере продуктивно представяне и да организира наличните знания в работещ план. Затова затруднението невинаги е следствие от липса на знания. Често ученикът познава необходимите формули и теореми, но не разпознава коя от тях е подходяща и как да я свърже с останалите елементи на задачата.

[*] Настоящата статия е частично финансирана по проект № РД- 08-114/05.02.2026 г. на фонд Научни изследвания на ШУ „Епископ Константин Преславски“

Основният методически проблем не е само как учениците да овладеят определен метод, а как да разпознават неговата приложимост, да го сравняват с алтернативни средства и да обосновават избора си. Процедурната увереност е необходима, но сама по себе си не гарантира пренос към задача с променена конфигурация. И обратно, свободното търсене без достатъчна опора може да остави ученика без работещ начален план. Необходимо е продуктивно единство между систематизиран инструментариум, алгоритмична устойчивост, стратегическа гъвкавост и творческо разсъждение.

Под математически инструментариум в настоящата работа се разбира организирана система от понятия, представяния, операции, теореми, евристики, модели и средства за проверка. В нея влизат синтетични построения, координати, вектори, функции, неравенства, екстремални принципи, инварианти и цифрови среди. Съществен е не броят на познатите средства, а способността те да бъдат разпознавани, свързвани и избирани според структурата на конкретната задача.

Изследванията върху решаването на задачи подчертават ролята на планирането, контрола, сравняването на решения и прехода между различни представяния [6, 7, 11–15]. В рамките на използваните източници по-слабо систематизиран като самостоятелен методически проблем остава въпросът как обхватът и организацията на преподавания инструментариум определят пространството от стратегии, достъпно за ученика в профилираната подготовка. Това твърдение очертава работна изследователска празнина, а не резултат от изчерпателен систематичен обзор.

Целта на статията е да се обоснове обща методическа рамка за избор и контрол на математически инструментариум и да се провери как различният нормативно зададен обхват на съдържанието разширява или ограничава възможните стратегии. Съпоставката България–Испания служи за контекстуализиране на тези учебни възможности, а задачите от оптимизацията и метричната стереометрия – за конкретни илюстрации. Работната теза е, че инструментариумът се превръща във фактор за математическо мислене, когато обучението включва структурен анализ, генериране на алтернативи, аргументиран избор, превод между представяния, интерпретация и независима проверка.

2 Теоретична и методическа рамка

Класическата схема на Pólya [11] отделя разбирането на задачата, съставянето на план, изпълнението и погледа назад. За настоящото изследване особено важен е моментът на съставяне на план. Той предполага не просто възпроизвеждане на позната процедура, а съгласуване между структурата на задачата и наличните математически средства.

Schoenfeld [13] разширява тази перспектива чрез ресурсите, евристиките, контрола и убежденията. Така става видимо защо двама ученици с близки знания могат да действат различно: единият разпознава приложим инструмент и контролира решението, а другият започва поредица от несвързани действия. Сравняването на методи може да подпомогне процедурната гъвкавост [12], а множествените решения позволяват да се наблюдава не само крайният отговор, но и аргументацията на избора [7]. Адаптивната експертност предполага едновременно ефективност и способност за промяна на стратегията [15].

Алгоритмизацията тук не означава запаметяване на несвързани формули. Тя отделя устойчивите действия – анализ, моделиране, операция, интерпретация и проверка – от решенията, зависещи от конкретната конфигурация. Креативният компонент остава в избора на координатна система, променливи, инварианти и начин за проверка. Една формула може да бъде приложена имитативно или смислово в зависимост от качеството на обосновката [8].

Преходът между регистрите е самостоятелен източник на трудност [6]. При стереометрична задача ученикът преминава от пространствен чертеж към координати, от координати към вектори и от векторна операция обратно към геометрична величина. Векторният метод може да намали неопределеността при търсенето на конструкция, но въвежда друго натоварване: моделиране, знаци, норми и детерминанти. Следователно не е коректно единият подход безусловно да се определя като „по-лесен“.

Цифровото средство също не става автоматично математически инструмент. GeoGebra може да подпомогне визуализацията, експеримента и контрола, но резултатът трябва да бъде обоснован математически [1, 14].

3 Общ модел за избор на инструментариум

Въз основа на разгледаните теоретични постановки предлагаме интегративен методически модел за избор и контрол на математическия инструментариум, който систематизира процеса на стратегическо решаване в седем взаимосвързани действия:

1. **Структурен анализ** – отделяне на обекти, отношения, ограничения и търсена величина.
2. **Разпознаване на водещи идеи** – симетрия, перпендикулярност, монотонност, инвариант или екстремален елемент.
3. **Генериране на инструменти** – формулиране на поне два реалистични подхода, когато това е възможно.
4. **Оценка и избор** – сравнение по адекватност, доказателствена сила, икономичност, риск от грешки и възможност за проверка.
5. **Моделиране и изпълнение** – преобразуване на условието в езика на избрания инструмент.
6. **Интерпретация** – връщане на символния резултат към първоначалния контекст.
7. **Контрол и ретроспекция** – проверка на допустимост, гранични случаи, размерност и алтернативен път.

Моделът не предписва универсален „най-добър“ метод. Един подход може да е най-кратък за изчисление, друг – най-прозрачен за доказателство, а трети – най-полезен за откриване на закономерност. Качеството на стратегията се оценява и по аргументираността на избора.

Между учебната програма и реалното действие на ученика стои и методическият избор на учителя: кои връзки да се подчертаят, кои алтернативни решения да се сравнят и кога алгоритмичната опора да бъде постепенно оттеглена. Така учебното съдържание се превръща в реално достъпен инструментариум, а инструментариумът – в пространство от възможни стратегии.

4 Сравнителен контекст: България и Испания

Съпоставката е включена като проверка на тезата, че организацията на достъпния инструментариум влияе върху действията, които ученикът може да предприеме. Корпусът включва българската Наредба № 7 и учебните програми по математика за профилирана подготовка в XI–XII клас [9, 10], както и консолидирания текст на Real Decreto 243/2022 за испанския Bachillerato [2]. Анализът се отнася до нормативно зададеното съдържание, компетентностите и оценяването, а не до всички училища, учители или ученици.

Сравнението е организирано по пет еднакво прилагани критерия: (1) обхват и дълбочина на математическото съдържание; (2) доказателство и аргументация; (3) моделиране и стратегически избор; (4) множествени представяния; (5) цифрови средства и

оценяване. Единицата на анализ е нормативно формулираното знание, умение, компетентност или критерий за оценяване.

Изводите се отнасят до институционално зададените възможности за математическа дейност. Те не доказват как съдържанието се реализира във всяка класна стая и не позволяват пряко ранжиране на националните системи по качество на преподаването.

Българската профилирана подготовка включва операции с вектори и скаларно произведение, аналитична геометрия на коничните сечения, числови редици, граници, непрекъснатост и производни. Приложенията на анализа достигат до монотонност, локални екстремуми, изпъкналост, асимптоти и изследване предимно на полиномни и дробно-линейни функции [9, 10]. Матрици, детерминанти и интегрално смятане не са нормативно включени, а векторният апарат не се развива системно до пълноценна аналитична геометрия в пространството. Испанските Matemáticas I–II включват матрици, детерминанти и линейни системи, интегрално смятане с приложения за лица и обеми, както и векторно-координатни модели на обекти в пространството [2]. По терминологията на българското висше образование това съдържание напомня избрани елементи от Математически анализ I–II и Линейна алгебра и аналитична геометрия I–II, но не следва да се приема за пълна еквивалентност по строгост, хорариум и доказателствен апарат. От гледна точка на наличните училищни средства испанската рамка задава по-широк математически инструментариум.

Кодирането е проведено на три равнища: на макроравнище – предназначение и организация на подготовката; на мезоравнище – съдържателни ядра, компетентности и критерии за оценяване; на микроравнище – действията при задача: разпознаване на структура, избор на представяне, прилагане на процедура, аргументиране и проверка. За всеки от петте критерия са съпоставени конкретни нормативни формулировки, а интерпретацията е ограничена до различия, които могат да бъдат проследени в посочения корпус.

Таблица 1

Аналитичен синтез на петте критерия за съпоставка на нормативните рамки

Критерий	Българска профилирана подготовка	Испански Bachillerato	Методически извод
Обхват и дълбочина	Операции с вектори и скаларно произведение; конични сечения; граници, производни и изследване предимно на полиномни и дробно-линейни функции; без матрици, детерминанти и интеграли	Матрици, детерминанти и системи; граници, производни и интеграли; векторна геометрия в пространството	Испанската рамка задава по-широк инструментариум
Доказателство и аргументация	Системност, дедуктивна строгост и обосноваване на изводи	Валидиране на решения, формулиране и обосноваване на хипотези	Строгостта трябва да съпътства стратегическия избор
Моделиране и стратегически избор	Моделиране и интерпретация; изборът между методи е по-слабо отделен като оценяван резултат	Изрично избиране и адаптиране на стратегии според ефективността	Оценява се не само резултатът, но и качеството на избора
Множествени представяния	Синтетични, координатни, алгебрични и функционални средства	Системно преминаване между алгебрични, графични, векторни и цифрови представяния	Преводът между регистрите се превръща в учебна цел

Критерий	Българска профилирана подготовка	Испански Bachillerato	Методически извод
Цифрови средства и оценяване	Софтуерът е предвиден; приложението и оценяването зависят в по-голяма степен от учебната среда	Цифровите средства, изборът, интерпретацията и комуникацията са изрично включени в критериите	Рубриката трябва да отчита стратегия, проверка и резултат

Съпоставката показва две различни и съществено неравностойни по обхват предпоставки. Българската рамка създава основа за техническа точност, доказателствена строгост и работа с класически методи, но ограничава инструментариума до скаларно произведение при векторите и до производни и сравнително тесен клас функции при анализа. Испанската рамка добавя по-широк набор от аналитични и векторно-алгебрични средства и по-явно изисква избор, сравнение и адаптиране на стратегии. Следователно от гледна точка на наличния математически инструментариум испанските ученици разполагат с по-широко пространство от възможни действия. Това е нормативно и съдържателно предимство, но реалният му ефект зависи от учителя, задачите и начина на оценяване.

5 Две предметни илюстрации

5.1 Съкратена илюстрация с екстремална задача

В задачата за триъгълник с даден периметър и максимално лице класическото решение използва Хероновата формула и неравенството между средноаритметично и средногеометрично, докато функционалният подход организира последователно максимизиране по променливите [3, 4]. И двата пътя водят до равностранен триъгълник, но разкриват различна организация на търсенето: разпознаване на подходящо неравенство срещу алгоритмизирано функционално моделиране. Сравнението показва как наличният инструментариум променя избора и проверката на стратегията.

5.2 Разстояние между кръстосани прави

Този пример продължава изследователска линия, развита в предходна съавторска работа за приложението на векторното произведение при намиране на ъгли в стереометрията [5].

Вторият пример е от преподавателската практика на И. Димитров и показва друг тип избор на математически инструмент. Нека $ABCDA_1B_1C_1D_1$ е правоъгълен паралелепипед с $AB = 2$, $BC = 3$ и $BB_1 = 4$. Точка E е средата на ръба A_1B_1. Да се намери разстоянието между кръстосаните прави EC и AC_1.

Избираме координатна система с начало B и оси по ръбовете BA, BC и BB_1. Тогава

(1) $$B(0,0,0),\quad A(2,0,0),\quad C(0,3,0),\quad B_1(0,0,4),\quad C_1(0,3,4),$$

а понеже E е средата на A_1B_1,

(2) $$E(1,0,4).$$

Направляващи вектори на двете прави са

(3) $$\vec{a}_1 = \overrightarrow{EC} = (-1,\ 3,\ -4), \qquad \vec{a}_2 = \overrightarrow{AC_1} = (-2,\ 3,\ 4).$$

Вектор, перпендикулярен едновременно на двете прави, получаваме чрез векторното произведение:

(4) $$\vec{n} = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = (24,\ 12,\ 3) = 3(8,\ 4,\ 1).$$

Следователно може да използваме нормалния вектор n = (8, 4, 1), за който |n| = 9. Формулата за разстояние между кръстосани прави следва от модула на скаларната проекция на свързващ вектор върху общия нормален вектор. Вземаме например

$$\vec{AE} = (-1,\ 0,\ 4). \tag{5}$$

Тогава

$$\rho(EC, AC_1) = \frac{|\vec{AE} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|(-1)\cdot 8 + 4\cdot 1|}{9} = \frac{4}{9}. \tag{6}$$

Този пример допълва екстремалната задача. При нея изборът е между неравенствен и функционален инструментариум, а тук – между пространствено синтетично търсене и векторно-координатен модел. Векторният подход организира решението като последователност от координатна система, направляващи вектори, общ нормален вектор и проекция, като прави избора на инструмент видим и проверим.

6 Методически модел за преподаване и връзка с оценяването

В преподаването седемте действия от общия модел се организират в пет фази: структурен анализ; генериране на алтернативи; моделиране и изпълнение; сравнение и аргументиран избор; интерпретация и независима проверка. Алгоритмичната опора постепенно се оттегля.

Седемте действия описват мисловната структура, петте фази – учителската подкрепа, а рубриката – наблюдаемите резултати. Учителят изисква обосновка на избора и независима проверка; GeoGebra подпомага чертежа и контрола, но не замества доказателството.

7 Проект на педагогическо изследване

Предлага се квазиекспериментален методически дизайн за проверка на тезата, че различният математически инструментариум променя не само успеваемостта, но и структурата на ученическите решения. Проектът е предварително описание на последващо изследване и не съдържа получени резултати.

Цел. Да се сравнят синтетичният и векторно-координатният подход при решаване на метрични задачи в пространството по отношение на началния избор на стратегия, правилността, завършеността, времето, обосновката, проверката и характера на грешките.

Работни хипотези. Очаква се векторно-координатната рамка да намалява случаите без работещ начален план и стратегическите грешки, но да увеличава относителния дял на локалните изчислителни грешки. Синтетичният подход може да подпомага пространствената интуиция и да води до по-кратки решения при успешно разпозната идея [7, 13]. Тези очаквания са проверими хипотези, а не предварително приети резултати.

Участници и процедура. Предвиждат се две предварително формирани групи от XI–XII клас с минимум 14 ученици във всяка. Съпоставимостта се проверява чрез входна задача и предходни резултати по геометрия. Едната група работи със синтетични методи, а другата – след еднакъв по продължителност обучителен модул по векторно-координатната рамка. Основните задачи, времето, инструкциите, преподавателят и условията са еднакви; неслучайното разпределение се отчита като ограничение.

Показатели. Предварително определеният първичен показател е качеството на началната стратегия по скала 0–2. Вторични показатели са правилност, завършеност, време, обосновка, независима проверка, пренос и видове грешки. За незавършените работи времето се отчита като достигнатия лимит, а незавършеността се анализира отделно.

Надеждност и анализ. Анонимизираните работи се кодират независимо от двама оценители след общо калибриране. За скалите 0–2 се отчита претеглен коефициент κ на Cohen. При малка извадка групите се сравняват с подходящ непараметричен критерий или ординален модел, като се представят размер на ефекта и доверителни интервали. Входното равнище се включва като предварително зададена контролна променлива.

Аналитичната рубрика кодира шест компонента по скала 0–2: начален избор (от липсващ до ясен и приложим план), моделиране (от некоректно до коректно), изпълнение (от прекъснато или със съществени грешки до точно), обосновка (от липсваща до достатъчна), проверка (от липсваща до независима) и пренос (от неуспешен до самостоятелен). Така стратегическата ориентация, техническата устойчивост и рефлексията се оценяват отделно.

Комплектът включва входна задача, две експертно съпоставени основни задачи, лист за обосноваване и задача за отложен пренос. Съдържателната валидност се проверява от двама специалисти и чрез пилотно апробиране. Анонимизираните работи се оценяват независимо; за скалите 0–2 се отчита претеглен κ на Cohen, а груповите различия се представят с размер на ефекта и доверителни интервали. Осигуряват се разрешение от училището, информирано съгласие, псевдонимизация и ограничен срок за съхранение на данните.

8 Дискусия и ограничения

Предложеният дизайн проверява тезата чрез мястото и характера на грешките, а не само чрез крайния отговор. Векторната рамка може да намали неопределеността при търсенето, но да увеличи координатните и изчислителните грешки; това е хипотеза, не получен резултат.

Синтетичният метод остава необходим: сравняването на решения и откриването на връзки могат да подпомагат пространствената интуиция и стратегическата гъвкавост [7, 12, 13]. Компетентността предполага избор между средства, а не автоматично предпочитание към един метод.

Ограниченията са нормативният характер на съпоставката, възможният единичен училищен контекст, влиянието на преподавателя и ограниченият набор задачи; бъдещите резултати следва да бъдат репликирани.

9 Заключение

Математическият инструментариум формира мисленето, когато ученикът разпознава структура, сравнява възможности, аргументира избор и проверява резултат. Българският профил е съществено ограничен до скаларно произведение и производни върху тесен клас функции, докато испанските Matemáticas I–II предоставят по-широк набор чрез матрици, детерминанти, интеграли и векторна геометрия в пространството.

Двете илюстрации показват как инструментът променя организацията на решението: от неравенствено и функционално моделиране до векторно-координатна процедура за кръстосани прави. По-широкият инструментариум увеличава възможните стратегии, без да отменя геометричната интуиция.

Емпиричната проверка предстои. Приносът е методически: модел за избор и контрол на инструментариума, възпроизводима нормативна съпоставка и операционализиран проект за последващо изследване.

Благодарности: Участието на втория автор в разработването на настоящото изследване е частично подкрепено по проект за научни изследвания РД-08-114/05.02.2026 г. на Шуменския университет „Епископ Константин Преславски“.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Artigue, M. Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. International Journal of Computers for Mathematical Learning, 7(3) (2002), 245–274. DOI: 10.1023/A:1022103903080
[2] Boletín Oficial del Estado. Real Decreto 243/2022, de 5 de abril, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas del Bachillerato. Texto consolidado, última actualización publicada el 02.07.2026. BOE-A-2022-5521. https://www.boe.es/buscar/act.php?id=BOE-A-2022-5521
[3] Dimitrov, I., Kodzha, M. A method for solving extremal problems in plane geometry. Mathematics and Education in Mathematics, 54 (2025), 109–117. DOI: 10.55630/mem.2025.54.109-117
[4] Dimitrov, I., Dimitrova, N., Hristov, M., Kodzha, E., Kodzha, M. A method for solving extremal problems in algebra and stereometry. Mathematics and Informatics, 69(1) (2026), 11–19. DOI: 10.53656/math2026-1-1-mse
[5] Dimitrov, I., Dimitrova, N., Hristov, M., Kodzha, M., Kodzha, E. Applying of the vector product in stereometry to find angles. Journal of Lifestyle and SDGs Review, 5(9) (2025), e07835. DOI: 10.47172/2965-730X.SDGsReview.v5.n09.pe07835
[6] Duval, R. A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1–2) (2006), 103–131. DOI: 10.1007/s10649-006-0400-z
[7] Leikin, R. Exploring mathematical creativity using multiple solution tasks. In R. Leikin, A. Berman, & B. Koichu (Eds.), Creativity in Mathematics and the Education of Gifted Students (pp. 129–145). Sense Publishers, 2009. DOI: 10.1163/9789087909352_010
[8] Lithner, J. A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 67(3) (2008), 255–276. DOI: 10.1007/s10649-007-9104-2
[9] Министерство на образованието и науката. Наредба № 7 от 11.08.2016 г. за профилираната подготовка (обн., ДВ, бр. 67 от 26.08.2016 г.; посл. изм., ДВ, бр. 80 от 24.09.2021 г.). Официален текст
[10] Министерство на образованието и науката. Учебни програми по математика за профилирана подготовка в XI–XII клас, утвърдени със Заповед № РД09-4022/21.12.2018 г. Официална страница
[11] Pólya, G. How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method. Princeton University Press, 2004 (original work published 1945).
[12] Rittle-Johnson, B., Star, J. R. Does comparing solution methods facilitate conceptual and procedural knowledge? An experimental study on learning to solve equations. *Journal of Educational Psychology*, 99(3) (2007), 561–574. DOI: 10.1037/0022-0663.99.3.561
[13] Schoenfeld, A. H. *Mathematical Problem Solving*. Academic Press, 1985.
[14] Trouche, L. Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: Guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 9(3) (2004), 281–307. DOI: 10.1007/s10758-004-3468-5
[15] Verschaffel, L., Luwel, K., Torbeyns, J., Van Dooren, W. Conceptualizing, investigating, and enhancing adaptive expertise in elementary mathematics education. *European Journal of Psychology of Education*, 24(3) (2009), 335–359. DOI: 10.1007/BF03174765

Ивайло Атанасов Димитров
ППМГ „Нанчо Попович“, гр. Шумен – старши учител по математика; докторант в докторска програма „Методика на обучението по математика и информатика“,
ШУ„Епископ Константин Преславски“
ORCID ID: 0009-0009-3384-7957
E-mail: pmg.iv.dimitrov@abv.bg

доц. д-р Мирослав Колев Христов
ШУ „Епископ Константин Преславски“, Факултет по математика и информатика, катедра „Алгебра и геометрия“
ORCID ID**:** 0000-0002-6475-6267
E-mail: miroslav.hristov@shu.bg