SOME PRACTICAL APPLICATIONS OF DERIVATIVE OF A FUNCTION OF ONE VARIABLE

TATYANA S. MADZHAROVA **VESELIN N. NENKOV**

ABSTRACT: *In this paper, we consider some practical applications of derivatives. Several problems from physics, economics, and biology whose solutions use derivative of a function of one variable are given.*

KEYWORDS: *motivation, rate of change, derivative, extremum of a function.*

DOI: https://doi.org/10.46687/KBBX8283

НЯКОИ ПРАКТИЧЕСКИ ПРИЛОЖЕНИЯ НА ПРОИЗВОДНА НА ФУНКЦИЯ НА ЕДНА ПРОМЕНЛИВА

ТАТЯНА С. МАДЖАРОВА **ВЕСЕЛИН Н. НЕНКОВ**

АБСТРАКТ: *В статията са разгледани практически приложения на производните. Показани са няколко задачи от физиката, икономиката и биологията, в чиито решения съществено се използват производни на функция на една променлива.*

1. Въведение

Липсата на мотивация е сериозен проблем при обучението на студенти от инженерни специалности, с който се сблъскваме ежедневно в работата си. Всеки от нас поне веднъж е чувал въпроса: *„Защо ми е нужно всичко това? Кога ще използвам производните в работата си на кораб или в реалния живот?“* Математиката често е обгърната от ореол на страх и непопулярност. За много студенти тя се е превърнала в абстрактен сбор от формули и теореми, които трябва да бъдат наизустени за контролно или изпит и забравени веднага след това. Загубата на мотивация в обучението по математика обикновено не се случва изведнъж. Тя е процес, който започва с натрупването на малки пропуски. Когато логиката зад едно понятие не бъде разбрана навреме, следващата тема започва да изглежда като непреодолимо изкачване. Основен фактор за загубата на мотивация е, че студентите не виждат практическото приложение на знанията си, ученето се превръща в механично писане на цифри и формули без душа. В последните години тече процес на значително редуциране на математическите дисциплини в учебните планове. Все по-малко време се отделя в лекциите на приложенията на математическите знания в инженерните дисциплини.

Целта на настоящата статия е да предложи някои приложения на производните, с които да се повиши мотивацията на студентите за изучаването им.

2. Задачи за намиране на производна на функция

Задача 1. Производител изработва платове с фиксирана ширина. Разходите за производството на x метра от този плат са $C = f(x)$ евро.

а) Какво е значението на производната $f'(x)$? Какви са нейните мерни единици?

б) Какво означава на практика твърдението, че $f'(1000) = 9$?

в) Коя стойност според Вас е по-голяма: $f'(50)$ или $f'(500)$? А как стои въпросът с $f'(5000)$? [1]

Решение. а) Производната $f'(x)$ е моментната скорост на промяна на C спрямо x; т.е. $f'(x)$ означава скоростта на промяна на производствените разходи спрямо броя на произведените метри. (Икономистите наричат тази скорост на промяна темп на изменение на цената.). Тъй като $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x}$, то производната ще се измерва в същите мерни единици, както $\frac{\Delta C}{\Delta x}$, т.е. в $€/m$.

б) Твърдението, че $f'(1000) = 9$, означава, че след произвеждането на $1000\ m$ плат, скоростта, с която нараства производствената цена, е $9\ €/m$. (Когато $x = 1000$, C нараства 9 пъти по-бързо от x.) Тъй като $\Delta x = 1$ е малка стойност в сравнение с $x = 1000$, можем да използваме приближението $f'(1000) \approx \Delta C/\Delta x = \Delta C/1 = \Delta C$ и да кажем, че цената за производството на 1000-ия метър (или на 1001-ия) е приблизително 9 €.

в) Темпът, с който нараства производствената цена (на m), вероятно е по-нисък при $x = 500$, отколкото при $x = 50$ (цената за производството на 500-тния m е по-ниска от цената за 50-ия m) поради ефекта на мащаба. (Производителят използва по-ефективно постоянните производствени разходи.). Следователно $f'(50) > f'(500)$. Но с разрастването на производството мащабната дейност може да стане неефективна и да възникнат разходи за извънреден труд. Така, че е възможно темпът на нарастване на разходите в крайна сметка да започне да се увеличава. В такъв случай може да се окаже, че $f'(5000) > f'(500)$.

Задача 2. Законът на Бойл – Мариот гласи, че произведението от налягането и обема на дадена маса газ при поддържане на постоянна температура остава постоянна величина, т.е. налягането P на газа е обратнопропорционално на обема V на газа. [1]

а) Да приемем, че налягането на проба въздух, заемаща обем $0{,}106\ m^3$ при $25^\circ C$, е $50\ kPa$. Изразете V като функция на P.

б) Изчислете $\frac{dV}{dP}$ при $P = 50\ kPa$. Какво е значението на производната? Какви са нейните мерни единици?

Решение. а) От закона на Бойл – Мариот имаме, че $P.V = C$ $(C = const.)$. Откъдето $C = 50.0{,}106 = 5{,}3\ kPa.m^3$. Тогава $V = \frac{5{,}3}{P}$.

б) $V' = \frac{dV}{dP} = -\frac{5{,}3}{P^2}$. При $P = 50\ kPa$ за производната се получава

$$\frac{dV}{dP} = -0{,}00212\ m^3/kPa.$$

Производната показва моментното изменение на обема спрямо налягането. Отрицателният знак означава, че с увеличаване на налягането обемът намалява.

Задача 3. Биомасата $B(t)$ на рибна популация представлява общата маса на индивидите в популацията към момента t. Тя е произведение от броя на индивидите

$N(t)$ в популацията и средната маса $M(t)$ на една риба към момента t. При рибките гупи размножаването протича непрекъснато. Да допуснем, че към момента $t = 4$ седмици популацията наброява 820 гупи и нараства с темп 50 гупи на седмица, докато средната маса е 1,2 g и се увеличава с темп 0,14 g/седмица. С какъв темп нараства биомасата при $t = 4$? [1]

Решение. По дефиниция биомасата $B(t)$ е произведение от броя на индивидите $N(t)$ и тяхната средна маса $M(t)$:

$$B(t) = N(t).M(t)$$

За да намерим темпа на нарастване на биомасата (производната спрямо времето t, намираме производната:

$$\frac{dB}{dt} = N(t).\frac{dM}{dt} + M(t).\frac{dN}{dt}.$$

Към момента $t = 4$ седмици имаме следните известни стойности от условието:

Брой индивиди: $N(4) = 820$ гупи;

Темп на нарастване на числеността: $\frac{dN}{dt} = 50$ гупи/седмица;

Средна маса на една риба: $M(4) = 1{,}2\ g$;

Темп на нарастване на масата: $\frac{dM}{dt} = 0{,}14\ g$/седмица.

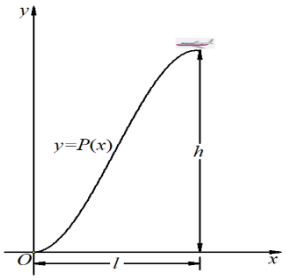
Заместваме стойностите във формулата:

$$\frac{dB}{dt} = 820.0{,}14 + 1{,}2.50 = 174{,}8\ g/\text{седмица}.$$

Задача 4. Траекторията за подход и кацане на самолет е показана на фиг. 1 и отговаря на следните условия:

(1) Круизната височина е h, когато снижаването започва на хоризонтално разстояние ℓ от точката на приземяване в началото на координатната система.

(2) Пилотът трябва да поддържа постоянна хоризонтална скорост v през цялото време на снижаване.



Фиг. 1. Траектория за подход и кацане на самолет

(3) Абсолютната стойност на вертикалното ускорение не трябва да надвишава константата k (която е много по-малка от земното ускорение g).

а) Намерете кубичен полином $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, който удовлетворява условие (1), като наложите подходящи гранични условия за функцията $P(x)$ и нейната първа производна $P'(x)$ в началото на снижаването и в точката на приземяване.

б) Използвайте условия (2) и (3), за да докажете неравенството:

$$\frac{6h.v^2}{\ell^2} \leq k.$$

в) Да предположим, че дадена авиокомпания решава да не позволява вертикалното ускорение на самолета да надвишава $k = 1400\ km/h^2$ (км в час на квадрат). Ако круизната височина на самолета е 1100 m (метра), а скоростта му е 500 km/h (км в час), на какво разстояние от летището пилотът трябва да започне снижаването? [1]

Решение. а) За да моделираме траекторията, приемаме, че самолетът лети от дясно наляво. Той започва своето снижаване при хоризонтално разстояние $x = \ell$ и височина $y = h$, и се приземява в началото на координатната система $x = 0, y = 0$.

За да бъде полетът безопасен и плавен, налагаме следните гранични условия:

При приземяването $x = 0$: Самолетът е на земята и се движи хоризонтално: $P(0) = 0$ и $P'(0) = 0$.

В началото на снижаването $x = \ell$: Самолетът е на круизна височина и лети хоризонтално: $P(\ell) = h$ и $P'(\ell) = 0$.

Нека кубичният полином е $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, а неговата първа производна е $P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. От $P(0) = 0$ следва, че $d = 0$. От $P'(0) = 0$ следва, че $c = 0$. Това опростява полинома до: $P(x) = ax^3 + bx^2$.

Сега прилагаме условията в точката на снижаване $x = \ell$: $P(\ell) = a\ell^3 + b\ell^2 = h$, $P'(\ell) = 3a\ell^2 + 2b\ell = 0$. Очевидно, в последното уравнение $\ell \neq 0$, откъдето определяме $b = -\frac{3}{2}a\ell$. Замествайки в условието $P(\ell) = a\ell^3 + b\ell^2 = h$, определяме $a = -\frac{2h}{\ell^3}$. Тогава $b = \frac{3h}{\ell^2}$.

Търсеният кубичен полином е $P(x) = -\frac{2h}{\ell^3}x^3 + \frac{3h}{\ell^2}x^2$.

б) Тъй като хоризонталната скорост v е постоянна и самолетът се движи към летището, хоризонталното му положение във времето t се описва с $x(t) = \ell - vt$. Следователно хоризонталната скорост е $\frac{dx}{dt} = -v$.

Вертикалното ускорение е втората производна на височината спрямо времето $\frac{d^2y}{dt^2}$. Вертикалната скорост е $\frac{dy}{dt} = \frac{dP(x)}{dt} = P'(x).\frac{dx}{dt} = -v.P'(x)$. Вертикалното ускорение е $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt}[-v.P'(x)] = -v.P''(x).\frac{dx}{dt} = v^2.P''(x)$.

Сега намираме втората производна на полинома $P(x)$.

$$P'(x) = -\frac{6h}{\ell^3}x^2 + \frac{6h}{\ell^2}x,$$
$$P''(x) = -\frac{12h}{\ell^3}x + \frac{6h}{\ell^2}.$$

Функцията $P''(x)$ е линейна, което означава, че нейните екстремуми (максимални абсолютни стойности) в интервала $[0, \ell]$ се намират в краищата на интервала:

При $x = 0$: $P''(0) = \frac{6h}{\ell^2}$. При $x = \ell$: $P''(\ell) = -\frac{12h}{\ell^2} + \frac{6h}{\ell^2} = -\frac{6h}{\ell^2}$.

Следователно максималната абсолютна стойност на втората производна е $\max|P''(x)| = \frac{6h}{\ell^2}$. Максималното вертикално ускорение е $|a_{\text{верт.}}| = v^2.\frac{6h}{\ell^2} = \frac{6h.v^2}{\ell^2}$. Тъй като по условие (3) вертикалното ускорение не трябва да надвишава константата k, то $\frac{6h.v^2}{\ell^2} \leq k$.

в) В случая $k = 1400\ km/h^2$, $v = 500\ km/h$, $h = 1100\ m = 1{,}1\ km$. Неравенството $\frac{6h.v^2}{\ell^2} \leq k$ може да се представи във вида $\ell^2 \geq \frac{6h.v^2}{k}$. След заместване с дадените стойности се получава $\ell^2 \geq \frac{6.1{,}1.250000}{1400}$, $\ell^2 \geq 1178{,}57$, $\ell \geq 34{,}33\ km$.

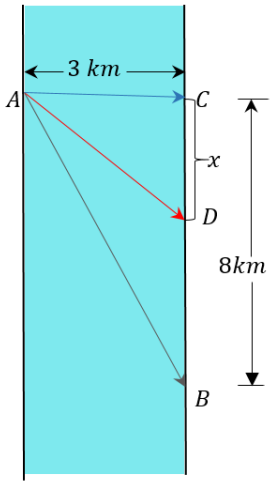
Следователно пилотът трябва да започне снижаването на разстояние минимум 34,33 км от началото на пистата.

3. Задачи за намиране на екстремум на функция

Задача 5. Човек потегля с лодка от точка A на брега на права река с ширина 3 km и иска да стигне до точка B, разположена на 8 km по течението на срещуположния бряг, възможно най-бързо (вж. Фигура 2). Той може да гребе директно през реката до точка C и след това да тича до B, може да гребе направо до B или пък да гребе до точка D между C и B и след това да тича до B. Ако скоростта му на гребане е 6 km/h, а скоростта на тичане – 8 km/h, къде трябва да акостира, за да стигне до B възможно най-бързо? (Приемаме, че скоростта на течението е пренебрежимо малка в сравнение със скоростта на гребане.) [1]

Решение. Ако означим разстоянието $|CD| = x$, то разстоянието, изминато с тичане е $|DB| = 8 - x$, а по Питагорова теорема се пресмята разстоянието, изминато с гребане $|AD| = \sqrt{x^2 + 9}$. Както е известно, $s = v.t$. Тогава времето за гребане е $\frac{\sqrt{x^2+9}}{6}$, а времето за бягане е $\frac{8-x}{8}$. Следователно общото време е

$$T(x) = \frac{\sqrt{x^2+9}}{6} + \frac{8-x}{8}.$$



Фиг. 2.

Функцията $T(x)$ е дефинирана в интервала $[0,8]$. Производната ѝ е $T'(x) = \frac{x}{6\sqrt{x^2+9}} - \frac{1}{8}$. Тъй като $x \geq 0$, то единствената критична точка, в която $T'(x) = 0$ е $x = \frac{9}{\sqrt{7}}$. Втората производна на функцията е $T''(x) = \frac{3}{2(x^2+9)^{\frac{3}{2}}}$ е положителна за всяко $x \in [0,8]$, т.е. функцията има минимум за $x = \frac{9}{\sqrt{7}}$.

Следователно мъжът трябва да акостира с лодката на място, намиращо се на разстояние $\frac{9}{\sqrt{7}}$ km ($< 3{,}4\ km$) по течението от началната си точка и след това да тича, за да пристигне възможно най-бързо в точка B.

Задача 6. За риба, плуваща със скорост v спрямо водата, разходът на енергия за единица време е пропорционален на v^3. Смята се, че мигриращите риби се стремят да минимизират общата енергия, необходима за изминаване на определено разстояние. Ако рибите плуват срещу течение със скорост u $(u < v)$, времето, необходимо за изминаване на разстояние L, е $\frac{L}{v-u}$, а общата енергия E, нужна за това, се изразява чрез формулата:

$$E(v) = av^3 \cdot \frac{L}{v-u},$$

където a е коефициентът на пропорционалност.

а) Определете стойността на v, при която E е минимална.
б) Начертайте графиката на $E(v)$. [1]

Решение. а) $E'(v) = \left(aL \cdot \frac{v^3}{v-u}\right)' = aL.\frac{3v^2(v-u)-v^3}{(v-u)^2} = aL\frac{v^2(2v-3u)}{(v-u)^2}$.

По условие рибите плуват срещу течението, т.е. $0 < u < v$. Следователно $(v-u)^2 \neq 0$ и $v^2 \neq 0$. От $E'(v) = 0$ се получава, че функцията има критична точка за $2v - 3u = 0$, $v = \frac{3}{2}u$.

Ако $u < v < \frac{3}{2}u$, то $E'(v) < 0$, т.е. функцията е монотонно намаляваща за $v \in \left(u, \frac{3}{2}u\right)$.

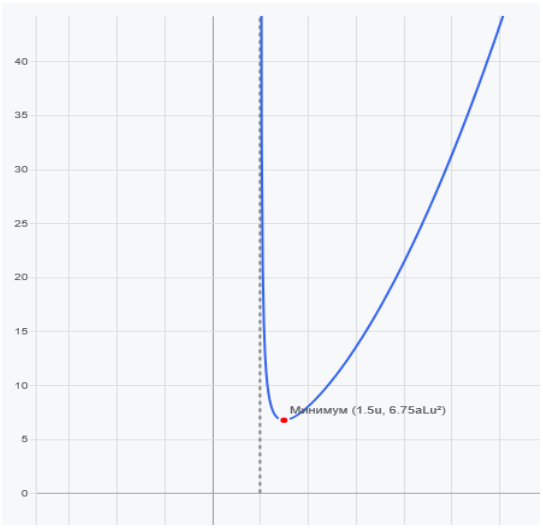
Ако $v > \frac{3}{2}u$, то $E'(v) > 0$, т.е. функцията е монотонно растяща.

Следователно $E(v)$ има минимум за $v = \frac{3}{2}u$.

$$E_{min}(v) = E\left(\frac{3}{2}u\right) = \frac{27}{4}aLu^2.$$

Забележка: Този резултат е потвърден експериментално; мигриращите риби плуват срещу течението със скорост, която е с 50% по-висока от скоростта на самото течение. [1]

б) По условие $v > u$. Тъй като $\lim\limits_{v \to u^+} E(v) = aL \cdot \frac{v^3}{v-u} = +\infty$, то $v = u$ е вертикална асимптота. Функцията $E(v)$ има минимум в точката $\left(\frac{3}{2}u, \frac{27}{4}aLu^2\right)$. Понеже $\lim\limits_{v \to +\infty} E(v) = +\infty$, графиката на функцията има вида



Фиг. 3. Графика на функцията на общата енергия $E(v)$

Задача 7. Най – простите модели за управление на запасите се характеризират с постоянно във времето търсене, мигновено попълване на запасите и липса на дефицит.

Всеки път се поръчва едно и също количество - оптималния размер на поръчката. Общите разходи за единица време (означават се с TC) могат да се представят като функция на обема на поръчката Q единици в следния вид:

$$TC(Q) = \frac{Co.D}{Q} + \frac{Ch}{2}.Q,$$

където Co са разходите за поръчка (в евро/1 поръчка), D –интензивност на търсенето (в единици продукция/ единица време), Ch - складови разходи за съхранение на продукцията (разходи за единица складирана продукция/единица време). Да се определи размерът на поръчката Q, при който общите разходи са минимални. [2]

Решение. Оптималният размер на поръчката за попълване на запаса Q се определя като се намери минимумът на функцията $TC(Q)$ спрямо Q. Предполагаме, че Q е непрекъсната променлива. Тогава можем да използваме познания ни от математическия анализ алгоритъм за намиране на минимум на функцията $TC(Q)$. Така получаваме необходимото условие за минимум, от което може да се определи оптималната стойност на Q:

$$\frac{dTC(Q)}{dQ} = -\frac{Co.D}{Q^2} + \frac{Ch}{2} = 0,\ Q^2 = \frac{2Co.D}{Ch},\ \ Q = \pm\sqrt{\frac{2Co.D}{Ch}}.$$

Изследвайки знакът на първата производна в околност на двете критични точки $Q = -\sqrt{\frac{2Co.D}{Ch}}$ и $Q = \sqrt{\frac{2Co.D}{Ch}}$ се установява, че в точката $Q = \sqrt{\frac{2Co.D}{Ch}}$ функцията на общите разходи има минимум. Следователно оптималният размер на поръчката за попълване на запаса е

$$EOQ = \sqrt{\frac{2Co.D}{Ch}}.$$

Полученият израз за оптималният размер на поръчката Q е известен като формула на Уилсън.

Оптималната стратегия за управляване на запасите за разглеждания модел се формулира така: Да се поръчват $EOQ = \sqrt{\frac{2Co.D}{Ch}}$ единици продукция през всеки $T = \frac{Q}{D}$ единици време.

4. Заключение

Скорост, плътност, интензитет на ток, мощност и температурен градиент във физиката; скорост на реакция и свиваемост в химията; скорост на растеж и градиент на скоростта на кръвния поток в биологията; темп на разходи и темп на печалба в икономиката; скорост на топлинния поток в геологията; темп на подобряване на резултатите в психологията; скорост на разпространение на слух в социологията – всичко това са частни случаи на едно-единствено математическо понятие:

производната. Това илюстрира факта, че част от силата на математиката се крие в нейната абстрактност. Едно абстрактно математическо понятие (като производната) може да има различни тълкувания във всяка от отделните науки. След като веднъж изведем свойствата на дадено математическо понятие, можем да приложим получените резултати във всички останали науки. Този подход е много по-ефективен, отколкото да се извеждат свойства за специфични понятия във всяка отделна наука. Френският математик Жозеф Фурие (1768–1830) го е изразил кратко и ясно: „Математиката съпоставя най-разнообразни явления и разкрива скритите аналогии, които ги обединяват.“

Математиката не е вроден дар за шепа „избрани“ математически гении. Тя е начин на мислене, тренировка за мозъка и инструмент за решаване на проблеми. Когато успеем да превърнем страха в любопитство, а формулите – в отговори на житейски въпроси, мотивацията се появява сама. Защото в крайна сметка, истинската формула на успеха в математиката не е запаметяването на отговора, а удоволствието от това сам да стигнеш до него.

ЛИТЕРАТУРА:

[1] Stewart, J., Calculus (Metric version), 8 edition, CENGAGE Learning, USA (2015).

[2] Taha, H., Operation Research. An Introduction. Pearson Education, London (2017).

Татяна Маджарова
Месторабота: Факултет Инженерен, ВВМУ „Н. Й. Вапцаров“
E-mail: tmadjarova@gmail.com

Веселин Ненков
Месторабота: Факултет Инженерен, ВВМУ „Н. Й. Вапцаров“
E-mail: v.nenkov@nvna.eu