CHARACTERIZATION OF FOUR-DIMENSIONAL EINSTEIN RIEMANNIAN MANIFOLDS USING CHARACTERISTICAL COEFFICIENTS OF JACOBI OPERATOR

VESELIN T. VIDEV

ABSTRACT: *Let (M,g) be 4-dimensional Riemannian manifold with metric tensor g and curvature tensor* ***R****. At any point $p\in M$ and for any unit tangent vector X in the tangent space is defined Jacobi operator R_X by formula $R_X(u)=R(u,X,X)$. The characteristic equation of R_X with respect to an arbitrary orthonormal basis e_1,e_2,e_3,e_4 in M_p has the form $c(c^3-J_1c^2+J_2c-J_3)=0$. In this paper we characterize four-dimensional Einstein Riemannian manifold by characteristic coefficiens of Jacobi operator.*

KEY WORDS: *Riemannian manifolds, Jacobi operator, characteristical coefficients, Einstein manifolds.*

DOI: ttps://doi.org/10.46687/QTTB4042

ХАРАКТЕРИЗИРАНЕ НА ЧЕТИРИМЕРНИТЕ АЙНЩАЙНОВИ РИМАНОВИ МНОГООБРАЗИЯ ЧРЕЗ ХАРАКТЕРИСТИЧНИТЕ КОЕФИЦИЕНТИ НА ОПЕРАТОРА НА ЯКОБИ

ВЕСЕЛИН Т. ВИДЕВ

АБСТРАКТ: *Нека (M,g) е 4-мерно Риманово многообразие с метричен тензор g и тензор на кривината R***.** *В произволна точка $p\in M$ и за произволен единичен вектор X от тангенциалното пространство M_p дефинираме оператора на Якоби R_X чрез равенството $R_X(u)=R(u,X,X)$. Относно произволен ортонормиран базис e_1,e_2,e_3,e_4 за тангенциалното пространство M_p, в точка $p\in M$, операторът R_X има характеристично уравнение $c(c^3-J_1c^2+J_2c-J_3)=0$. В представената статия характеризираме четиримерните Айнщайнови Риманови многообразия чрез характеристичните коефициенти на оператора на Якоби.*

КЛЮЧОВИ ДУМИ: *Риманови многообразия, Якоби оператор, характеристични коефициенти, Айнщайнови многообразия.*

Нека (M,g) е n-мерно Риманово многообразие с метричен тензор g и тензор на кривината R**.** В произволна точка $p\in M$ и за произволен единичен вектор X в тангенциалното пространство M_p дефинираме симетричния линеен оператор на Якоби R_X чрез равенството [1]:

$$R_X(u)=R(u,X,X)\qquad .$$

Ако размерността на (M,g) е $n=4$ и e_1,e_2,e_3,e_4 е произволен ортонормиран базис за тангенциалното пространство M_p в произволна точка $p\in M$, тогава R_X има следното характеристично уравнение:

$$c(c^3 - J_1 c^2 + J_2 c - J_3)=0.$$

По-нататък ще изследваме четиримерните Риманови многообразия, за които в произволна точка p от многообразието характеристичният коефициент $J_1(p;X)$ и един от характеристичните коефициенти $J_2(p;X)$ или $J_3(p;X)$ на оператора на Якоби R_X са точково постоянни. Съгласно теоремата на Херглотц условието характеристичният коефициент $J_1(p;X)$ да е точково постоянен е равносилно с изискването (M,g) да е Айнщайново Риманово многообразие. За четиримерните Айнщайнови Риманови многообразия са в сила следните резултати:

Теорема 1 [5]. *Нека M е 4-мерно Риманово многообразие. Тогава M е Айнщайново точно, когато* $\sigma(P^{\perp})=\sigma(P)$ *за произволна площадка P от тангенциалното пространство* M_p *, в произволна точка p от M.*

Забележка. Тук $\sigma(P)$ означава секционната кривина за площадката P.

Лема 1 [6]. *Ako (M,g) е 4-мерно Айнщайново многообразие, то компонентите на тензора на кривината R относно произволен ортонормиран базис* e_1,e_2,e_3,e_4 *от тангенциалното пространство* M_p *в произволна точка* $p\in M$ *удовлетворяват равенствата*:

(1) $$R_{issk}+ R_{ijjk}= 0 \qquad (s \neq j).$$

Лема 2. *Нека (M,g) е четиримерно Айнщайново Риманово многообразие, за което в произволна точка* $p\in M$ *и за произволен вектор* $X\in S_pM$ *характеристичният коефициент* $J_2(p;X)$ *на оператора на Якоби* R_X *е точково постоянен. Тогава ненулевите компоненти на тензора на кривината R относно ортонормирания базис* e_1,e_2,e_3,e_4 *за тангенциалното пространство* M_p*, състоящ се от собствени вектори на оператора на Якоби* R_{e_1} $(X=e_1)$*, се дават чрез следните формули:*

(2) $$\begin{gathered} K_{12} = K_{34} ,\ K_{13} = K_{24} ,\ K_{14} = K_{23} , \\ R_{1223} = R_{1443} = R_{1332} = R_{1442} =R_{1224}=R_{1334}= 0, \\ R_{3124} + R_{3214} = K_{13} - K_{14}, \\ R_{4132} + R_{4312} = K_{14} - K_{12}, \\ R_{2143} + R_{2413} = K_{12} - K_{13}. \end{gathered}$$

Доказателство. От характеристичното уравнение на операторите на Якоби R_{e_1}, R_{e_2}, R_{e_3}, R_{e_4} получаваме следните характеристични коефициенти:

(3) $$\begin{aligned} J_1(p;e_1) &= K_{12} + K_{13} + K_{14} , \\ J_2(p;e_1) &= R^2_{2113} + R^2_{2114} + R^2_{3114} - K_{12}K_{13} - K_{12}K_{14} - K_{13}K_{14} , \\ J_3(p;e_1) &= K_{12}K_{13}K_{14}+2R_{2113}R_{2114}R_{3114}- R^2_{2114}K_{13} - R^2_{3114}K_{12} - R^2_{2113}K_{14}; \\ J_1(p;e_2) &= K_{12} + K_{23} + K_{24}, \\ J_2(p;e_2) &= K_{12}K_{23} + K_{12}K_{24} + K_{23}K_{24} - R^2_{1223} - R^2_{1224} - R^2_{3224} , \\ J_3(p;e_2) &= K_{12}K_{23}K_{24} + 2R_{1223}R_{1224}R_{3224} - R^2_{1224}K_{23} - R^2_{3224}K_{12} - R^2_{1223}K_{24} ; \\ J_1(p;e_3) &= K_{13} + K_{23} + K_{34} , \\ J_2(p;e_3) &= K_{13}K_{23} + K_{13}K_{34} + K_{23}K_{34} - R^2_{1332} - R^2_{1334} - R^2_{2334} , \\ J_3(p;e_3) &= K_{13}K_{23}K_{34} + 2R_{1332}R_{1334}K_{2334} - R^2_{1334}K_{23} - R^2_{2334}K_{13} - R^2_{1332}K_{34} ; \\ J_1(p;e_4) &= K_{14} + K_{24} + K_{34} , \\ J_2(p;e_4) &= K_{14}K_{24} + K_{14}K_{34} + K_{24}K_{34} - R^2_{1442} - R^2_{1443} - R^2_{2443} , \\ J_3(p;e_4) &= K_{14}K_{24}K_{34} + 2R_{1442}R_{1443}K_{2443} - R^2_{1443}K_{24} - R^2_{2443}K_{14} - R^2_{1442}K_{34} . \end{aligned}$$

Да приемем, че e_1, e_2, e_3, e_4 са собствени вектори на оператора на Якоби R_{e_1}. Тогава са в сила равенствата

(4) $$R_{2113} = R_{2114} = R_{3114}= 0 ,$$

където K_{12}, K_{13}, K_{14} са собствените стойности на оператора на Якоби R_{e_1}. От условието за точкова постоянност

$$J_2(p;e_1) = J_2(p;e_2) = J_2(p;e_3) = J_2(p;e_4)$$

и равенствата (3) и (4) получаваме

$$R^2_{1223} + R^2_{1224} = R^2_{1332} + R^2_{1334} = R^2_{1443} + R^2_{1442} = 0 \,,$$

откъдето следва

(5) $$R_{1223} = R_{1224} = R_{1332} = R_{1334} = R_{1443} = R_{1442} = 0 \,.$$

Тогава за характеристичното уравнение на оператора на Якоби $R_{\frac{e_1+e_2}{\sqrt{2}}}$ с корен d получаваме:

(6) $$d(d-K_{12})\left(d^2-(K_{13}+K_{23})d+\left(\frac{K_{13}+K_{23}}{2}\right)^2\right)=0.$$

Оттук за собствените стойности на оператора $R_{\frac{e_1+e_2}{\sqrt{2}}}$ получаваме системата

(7) $$\begin{aligned} &d_0 = 0, \quad d_1 = K_{12}, \\ &2d_2 = K_{13} + K_{14} - (R_{3124} + R_{3214}), \\ &2d_3 = K_{13} + K_{14} + (R_{3124} + R_{3214}), \end{aligned}$$

от която следва равенството

(8) $$d_2 + d_3 = K_{13} + K_{14}.$$

От условието за точкова постоянност $J_2(p;e_1) = J_2(p;\frac{e_1+e_2}{\sqrt{2}})$ получаваме

$$K_{12}(K_{13} + K_{14}) + K_{13}K_{14} = d_1(d_2 + d_3) + d_2d_3 \,,$$

От последното равенство, равенства (7) и (8), имаме

(9) $$\begin{aligned} &K_{13}K_{14} = d_2d_3 \,, \\ &R_{3124} + R_{3214} = \varepsilon(K_{13} - K_{14}) \,, \quad \varepsilon = \pm 1. \end{aligned}$$

Като използваме условието

$$J_2(p;e_1) = J_2(p;\frac{e_1+e_3}{\sqrt{2}}) = J_2(p;\frac{e_1+e_4}{\sqrt{2}}) \,,$$

характеристичното уравнение на оператора на Якоби $R_{\frac{e_1+e_3}{\sqrt{2}}}$ (с корен $\bar{d}$), което има вида

(10) $$\bar{d}(\bar{d}-K_{13})(\bar{d}^2-(K_{12}+K_{23})\bar{d}+(\frac{K_{12}+K_{23}}{2})^2-(\frac{R_{2134}+R_{2314}}{2})^2)=0$$

и характеристичното уравнение на оператора на Якоби $R_{\frac{e_1+e_4}{\sqrt{2}}}$ (с корен $\tilde{d}$), което има вида

(11) $$\tilde{d}(\tilde{d}-K_{14})(\tilde{d}^2-(K_{12}+K_{24})\tilde{d}+(\frac{K_{12}+K_{24}}{2})^2-(\frac{R_{2143}+R_{2413}}{2})^2)=0$$

получаваме още равенствата

$$R_{4132} + R_{4312} = \varepsilon(K_{14} - K_{12}) \,,$$

(12) $$R_{2143} + R_{2413} = \varepsilon(K_{12} - K_{13}), \quad \varepsilon = \pm 1.$$

След евентуална смяна на e_1 с $-e_1$ можем да приемем, че в (9) и (12) имаме $\varepsilon=1$. Тогава от тези равенства получаваме доказателството на лемата.

Лема 3. *Нека (M,g) е четиримерно Риманово многообразие и нека в произволна точка $p\in M$ ненулевите компоненти на тензора на кривината R относно ортонормирания базис e_1, e_2, e_3, e_4 за тангенциалното пространство M_p, състоящ се от собствени вектори на оператора на Якоби R_{e_1}, се изразяват чрез формулите* (2). *Тогава собствените стойности на R_{e_1} са точково постоянни в точката p.*

Доказателство. Нека z е произволен единичен вектор от тангенциалното пространство M_p и нека

$$z = a_0e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4 .$$

Съгласно (2), за елементите на матрицата (f_{ij}), на оператора на Якоби R_z, относно ортонормирания базис e_1, e_2, e_3, e_4 от собствени вектори на оператора на Якоби R_{e_1}, получаваме

$$\begin{aligned}
f_{11} &= a_1^2K_{12} + a_2^2K_{13} + a_3^2K_{14} ,\\
f_{12} &= -a_0a_1K_{12} + a_2a_3(K_{14} - K_{13}) ,\\
f_{13} &= -a_0a_2K_{14} + a_1a_3(K_{12} - K_{14}) ,\\
f_{14} &= -a_0a_3K_{14} + a_1a_2(K_{13} - K_{12}) ,\\
f_{22} &= a_0^2 K_{12} + a_2^2 K_{14} ,\\
f_{23} &= a_0a_3(K_{13} - K_{12}) - a_1a_2K_{14} ,\\
f_{24} &= a_0a_2(K_{12} - K_{14}) - a_1a_3K_{13} ,\\
f_{33} &= a_0^2 K_{13} + a_1^2 K_{14} ,\\
f_{34} &= a_0a_1(K_{14} - K_{13}) - a_2a_3K_{12} ,\\
f_{44} &= a_0^2 K_{14} + a_1^2 K_{13} + a_2^2 K_{14} .
\end{aligned}$$

Тогава характеристичното уравнение на оператора на Якоби R_z може да се представи в следната форма

$$\det(C-\kappa(p;z)E) = \det(A^{-1}CA-\kappa(p;z)E) = 0,$$

където $\kappa(p;z)$ е собствена стойност на R_z, а A и C са матриците

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4\\ -a_2 & a_1 & -a_4 & a_3\\ -a_3 & a_4 & a_1 & -a_2\\ -a_4 & -a_3 & a_2 & a_1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & K_{12} & 0 & 0\\ 0 & 0 & K_{13} & 0\\ 0 & 0 & 0 & K_{14}\end{pmatrix}.$$

Последното уравнение може да се запише във вида

$$\kappa(p;z)(\kappa(p;z) - K_{12})(\kappa(p;z) - K_{13})(\kappa(p;z) - K_{14})= 0$$

или

$$\det(C-\kappa(p;z)E) = 0 .$$

Оттук следва, че

$$\kappa_0(p;z) = 0 , \quad \kappa_1(p;z) = K_{12} , \quad \kappa_2(p;z) = K_{13} , \quad \kappa_3(p;z) = K_{14} ,$$

което съгласно произволността на вектора $z\in S_pM$ означава, че собствените стойности на *произволен* оператор на Якоби R_z са точково постоянни.

Теорема 2. *Едно четиримерно Айнщайново Риманово многообразие (M,g) е точково постоянно Осерманово многообразие тогава и само тогава, когато в произволна точка*

$p \in M$ и за произволен вектор $X \in S_pM$ характеристичният коефициент $J_2(p;X)$ на оператора на Якоби R_X е точково постоянен.

Доказателството на теоремата следва от лема 2 и лема 3.

Лема 4. *Нека (M,g) е четиримерно Айнщайново Риманово многообразие, за което в произволна точка $p \in M$ и за произволен вектор $X \in S_pM$ характеристичният коефициент $J_3(p;X) \neq 0$ на оператора на Якоби R_X е точково постоянен. Тогава ненулевите компоненти на тензора на кривината R относно ортонормирания базис e_1, e_2, e_3, e_4 за тангенциалното пространство M_p, състоящ се от собствени вектори на оператора на Якоби R_X $(X=e_1)$, се дават чрез формулите* (2).

Доказателство. Нека (M,g) е 4-мерно Айнщайново Риманово многообразие, за което характеристичния коефициент $J_3(p;X) \neq 0$ на оператора на Якоби R_X е точково постоянен и различен от нула, в произволна точка $p \in M$, за произволен вектор $X \in S_pM$. Тогава

$$J_3(p;e_1) = J_3(p;e_2) = J_3(p;e_3) = J_3(p;e_4)\ ,$$

което съгласно съответните изрази в (3) ни дава системата

$$K_{12}R^2_{1332} + K_{13}R^2_{1223} = 0\ ,$$
$$K_{13}R^2_{1223} + K_{14}R^2_{1224} = 0\ ,$$
$$K_{14}R^2_{1224} + K_{12}R^2_{1332} = 0\ .$$

Понеже $J_3(p;e_1)=K_{12}K_{13}K_{14} \neq 0$, то детерминантата на тази система е равна на нула, откъдето следва

$$R_{1223} = R_{1224} = R_{1332} = 0\ .$$

От тези равенства и (1) получаваме отново (5). По-нататък от точково постоянното условие

$$J_3(p;e_1) = J_3(p;\frac{e_1+e_2}{\sqrt{2}}),$$

съгласно (3), (5) и (7) и като вземем пред вид, че $K_{12} = d_1 \neq 0$, имаме

$$K_{13}K_{14} = d_2d_3\ ,$$

откъдето и системата (7), за собствените стойности на оператора на Якоби $R_{\frac{e_1+e_2}{\sqrt{2}}}$ получаваме отново (8). Аналогично от условията

$$J_3(p;e_1) = J_3(p;\frac{e_1+e_3}{\sqrt{2}}) = J_3(p;\frac{e_1+e_4}{\sqrt{2}})$$

и съответните коефициенти в (10) и (11) отново следват равенствата (2).

Теорема 3. *Едно четиримерно Айнщайново Риманово многообразие (M,g) е точково постоянно Осерманово многообразие тогава и само тогава, когато в произволна точка $p \in M$ и за произволен вектор $X \in S_pM$ характеристичният коефициент $J_3(p;X) \neq 0$ на оператора на Якоби R_X е точково постоянен.*

Доказателството на теоремата следва от лема 4 и лема 3.

Резултатите от Теорема 1 и Теорема 2 могат да се обобщят в следната

Теорема 4. *Едно четиримерно Риманово многообразие (M,g) е точково постоянно Осерманово многообразие тогава и само тогава, когато в произволна точка $p \in M$ и за произволен вектор $X \in S_pM$ характеристичният коефициент $J_1(p;X)$ и един от характеристичните коефициенти $J_2(p;X)$ или $J_3(p;X) \neq 0$ на оператора на Якоби R_X са точково постоянни.*

ЛИТЕРАТУРА:

[1] R. Osserman . *Curvature in the eighties*. Journal Amer. Math. Monthly, vol. 97 (1990), 731-756

[2] Q.-Sh. Chi . *A curvature characterization of certain locally rank-one symmetric spaces*. J. Diff. Geom. 28(1988), 187-202

[3] P.Gilkey, A. Swann, L.Vanchecke. "*Isoparametric geodesic spheres and a conjecture of Osserman concerning the Jacobi operator"*, Quart. J. Math. Oxford(2)

[4] Besse. *Geometrie Riemanniene et dimension* 4. Cedic/Fernand Nathan Paris (1981)

[5] I. Singer , J. Thorpe. *The curvature of* 4-*dimensional Einstein spaces.* Global Analisys. Papers in Honour of K. Kodaira. University of Tokio press, Princeton University Press (1969)

[6] K.Sekigawa K., L. Vanhecke L. *Volume preserving geodesic symmetries in four-dimensional* 2-*stein spaces*. Kodai.Math J., 9(1986), 215-223