MATTEX 2024,
CONFERENCE PROCEEDINGS, v. 1, pp. 11 – 18

CHARACTERIZATION OF FOUR-DIMENSIONAL ALMOST HERMITIAN MANIFOLD USING CHARACTERISTIC COEFFICIENFS OF JACOBI OPERATOR

VESELIN T. VIDEV

ABASTRACT: *In this paper we characterize some classes of almost Hermitian manifolds (M,g,J) for which at any point $p \in M$ the characteristically coefficient of Jacobi operators R_X and R_{JX} coincide. We prove that these are AH_3–manifold or AH_3–manifold of constant holomorphic sectional curvature or generalized complex space forms.*

KEYWORDS: *Jacobi operator, characteristically coefficients, AH_3–manifold, constant holomorphic sectional curvature, generalized complex space forms.*

DOI: https://doi.org/10.46687/RZGF6514

ХАРАКТЕРИЗИРАНЕ НА ЧЕТИРИМЕРНИТЕ ПОЧТИ ЕРМИТОВИ МНОГООБРАЗИЯ ЧРЕЗ ХАРАКТЕРИСТИЧНИ КОЕФИЦИЕНТИ НА ОПЕРАТОРА НА ЯКОБИ

ВЕСЕЛИН Т. ВИДЕВ

АБСТРАКТ: *В представената статия характеризираме четirимерните почти Ермитови многообразия (M,g,J) за които в произволна точка p от многообразието характеристичните коефициенти на операторите на Якоби R_X и R_{JX} съвпадат. Доказваме че това са AH_3 – многообразия или AH_3 – многообразия с точково постоянна холоморфна секционна кривина, или обобщени комплексни пространствени форми.*

КЛЮЧОВИ ДУМИ: *Якоби оператор, характеристични коефициенти, АН3 – многообразия, точково постоянна холоморфна секционна кривина, обобщени комплексни пространствени форми.*

Нека (M,g,J) е 4-мерно почти Ермитово (AH) многообразие с метричен тензор g и тензор на Ричи ρ, който се дефинира чрез равенството

(1) $$\rho(x,y) = R(e_1,x,y,e_1) + R(e_2,x,y,e_2) + R(Je_1,x,y,Je_1) + R(Je_2,x,y,Je_2),$$

където e_1,e_2,Je_1,Je_2 е произволен адаптиран базис за тангенциалното пространство M_p , в точката $p\in M$. Тензорът на Ричи ρ се нарича Ермитов, ако е в сила равенството:

(2) $$\rho(x, y) = \rho(Jx, Jy)$$

за произволни вектори x, y от единичната сфера S_pM, *в произволна точка* $p\in M$. От симетричността на ρ следва

Лема 1. *Нека (M,g,J) е 4-мерно почти Ермитово многообразие. Тогава следните условия са еквивалентни:*

i) ρ *е Ермитов тензор на Ричи.*

ii) $\rho(x, Jx) = 0$ *за произволен вектор* $x \in S_pM$, *в произволна точка* $p\in M$.

Една площадка E^2 от тангенциалното пространство M_p , в точка p от почти Ермитовото многообразие (M,g,J) се нарича холоморфна ако $E^2 \equiv JE$, а ако $E^2 \perp JE^2$, то E^2 се нарича антихоломорфна площадка [6].

Лема 2. *Нека (M,g,J) е 4-мерно почти Ермитово многообразие с Ермитов тензор на Ричи. Тогава секционната кривина на всяка антихоломорфна площадка E^2 от тангенциалното пространство M_p е равна на кривината на ортогоналното ѝ допълнение в M_p, за произволна точка $p\in M$.*

Доказателство. Нека x,y е произволна ортонормирана двойка от тангенциалното пространство M_p , за произволна точка $p\in M$ така , че x,y,Jx,Jy е адаптиран базис за M_p. Тогава от (1) получаваме:

(3) $$\rho(x,y)=K(x,y)+H(x)+K(x,Jy)\,,\quad \rho(Jx,Jy)=K(Jx,Jy)+H(x)+K(Jx,y)\,,$$

(4) $$\rho(y,y)=K(x,y)+H(y)+K(y,Jx)\,,\quad \rho(Jy,Jy)=K(Jx,Jy)+H(y)+K(x,Jy)\,.$$

Понеже ρ е Ермитов тензор на Ричи, то от лема 1 , (3) и (4) получаваме

$$K(x,y) = K(Jx,Jy),$$

за произволни вектори $x,\, y\in S_pM$, което доказва лемата. По-нататък ще използваме следните две твърдения:

Твърдение 1 [3]. *Нека (M,g,J) е почти Ермитово многообразие с $\dim M \geq 4$ и нека T е 4-мерно линейно изображение със свойствата:*

a) $T(x, y, z, u) = -T(y, x, z, u)$,

b) $T(x, y, z, u) = -T(x, y, u, z)$,

c) $T(x, y, z, u) + T(y, z, x, u) + T(z, x, y, u) = 0$,

d) $T(x, y, y, x) = 0$, *където x, y е произволен ортонормиран базис, за произволна площадка E^2 така , че ъгълът между E^2 и JE^2 е равен на 0, $\frac{\pi}{4}$ или $\frac{\pi}{2}$. Тогава T е нулевото изображение.*

Твърдение 2 [4]. *Нека (M,g,J) е почти Ермитово многообразие и нека E^2 е произволна площадка от тангенциалното пространство M_p в произволна точка $p\in M$, за която ъгълът между E^2 и JE^2 е равен на 0, $\frac{\pi}{4}$ или $\frac{\pi}{2}$. Тогава съществува ортонормиран базис $x,\ \frac{Jx+y}{\sqrt{2}}$ за площадката, определена от тези вектори, като $x, y \in S_pM$, $x \perp y, Jy$.*

Лема 3. *Нека (M,g,J) е 4-мерно почти Ермитово многообразие с Ермитов тензор на Ричи. Тогава във всяка точка $p\in M$ и за произволни вектори $x,\, y\in S_pM$, за които $x\perp y, Jy$ е в сила равенството:*

(5) $$R(x, y, y, Jx) + R(x, Jy, Jy, Jx) = 0.$$

Доказателството следва непосредствено от (1) и (2).

Дефиниция 1. *Едно почти Ермитово многообразие (M,g,J) се нарича AH_3-многообразие, ако за произволни вектори x,y,z,u от тангенциалното пространство M_p , в произволна точка $p\in M$, е в сила равенството*[5]:

(6) $$R(x, y, z, u) = R(Jx, Jy, Jz, Ju).$$

Полагаме:

(7) $$T(x, y, z, u) = R(Jx, Jy, Jz, Ju) -R(x, y, z, u).$$

Ако *(M,g,J)* е AH_3 -многообразие, то

(8) $$T(x, Jx, Jx, x) = 0.$$

Освен това, ако (M,g,J) е 4-мерно почти Ермитово многообразие с Ермитов тензор на Ричи имаме:

(9) $$T(x, y, y, x) = K(Jx, Jy) - K(x, y)$$

за произволни вектори x, y от тангенциалното пространство M_p, за които $x \perp y, Jy$ в произволна точка $p \in M$.

Лема 4. *Едно 4-мерно почти Ермитово многообразие (M,g,J) с Ермитов тензор на Ричи е AH_3-многобразие тогава и само тогава, когато за произволни вектори x, y от тангенциалното пространство M_p, за които $x \perp y, Jy$, в произволна точка $p \in M$, е в сила равенството:*

(10) $$R(x,Jx,Jx,Jy)+R(Jx,x,x,y)=0 .$$

Доказателство. Нека p е произволна точка от M и нека E^2 е произволна площадка от тангенциалното пространство M_p, за която ъгълът между E^2 и JE^2 е равен на $0, \frac{\pi}{4}$ или $\frac{\pi}{2}$**.** В [1] се доказва, че съществува ортонормирана двойка вектори $x,y \in S_pM$ за които $x \perp y, Jy$ така , че $x, \frac{Jx+y}{\sqrt{2}}$ е ортонормиран базис за площадката E^2 . Тогава

$$T\left(x, \frac{Jx+y}{\sqrt{2}}, \frac{Jx+y}{\sqrt{2}}, x\right)=\frac{1}{2}\Big(T(x,Jx,Jx,x)+T(x,Jx,y,x)+T(x,y,y,x)\Big) .$$

Сега от (8) и (9) получаваме

$$T\left(x, \frac{Jx+y}{\sqrt{2}}, \frac{Jx+y}{\sqrt{2}}, x\right)=-2\Big(R(x,Jx,Jx,Jy)+R(Jx,x,x,y)\Big).$$

От условието (10) и последното равенство получаваме

$$T\left(x, \frac{Jx+y}{\sqrt{2}}, \frac{Jx+y}{\sqrt{2}}, x\right)=0 ,$$

за произволни вектори $x, y \in S_pM$, за които $x \perp y, Jy$, в произволна точка $p \in M$. Съгласно твърдение 1 имаме , че $T \equiv 0$ и тогава (6) е в сила.

Обратно, ако (M,g,J) е почти Ермитово многобразие, т. е. (6) е в сила, то от полагането (7) за тензора T директно следва (9).

Едно $2n$-мерно почти Ермитово многобразие (M,g,J) е многобразие с точково постоянна холоморфна секционна кривина $\mu(p)$, във всяка точка $p \in M$, ако е в сила следната формула [1]:

(11) $$R^*(x,y,z,u)=\frac{\mu(p)}{4}\Big(g(y,z)g(x,u)- g(x,z)g(y,u)- g(Jy,z)g(Jx,u) - g(Jx,z)g(Jy,u)-2g(Jx,y)g(Jz,u)\Big) .$$

Тук R^* е тензорът от тип (0,4), който се определя от дефиниционното равенство

(12) $$16R^*(x,y,z,u)=3R(x,y,z,u)+3R(Jx,Jy,Jz,Ju)+3R(x,y,Jz,Ju) +3R(Jx,Jy,z,u)-R(Jy,Jz,x,u)-R(Jz,Jx,y,u)+R(y,Jz,Jx,u)+R(Jz,x,Jy,u) -R(y,z,Jx,Ju)-R(z,x,Jy,Ju)+R(Jy,z,x,Ju)+R(z,Jx,y,Ju).$$

Тензорът R^* притежава следните свойства:

$$R^*(X,Y,Z,U)=-R^*(Y,X,Z,U) , \quad R^*(X,Y,Z,U)=-R^*(X,Y,U,Z) ,$$

$$R^{*}(X,Y,Z,U)+R^{*}(Y,Z,X,U)+R^{*}(Z,X,Y,U)=0 \ ,$$

$$R^{*}(X,Y,JZJ,JU)=R^{*}(X,Y,Z,U)\ ,\ R^{*}(X,JX,JX,X)=R(X,JX,JX,X).$$

Това е единственият келеров тензор от тип (0,4) холоморфните секционни кривини на който съвпадат с холоморфните секционни кривини на тензора на кривината R.

Ако (M,g,J) е почти Ермитово многообразие с точково постоянна холоморфна секционна кривина $\mu(p)$ и точково постоянна антихоломорфна секционна кривина $\nu(p)$, то за тензора на кривината R имаме следното представяне[5]:

$$R(x,y,z)=\nu(p)\big(g(y,z)x-g(x,z)y\big)$$

$$+\frac{1}{3}\big(\mu(p)-\nu(p)\big)\big(g(Jy,z)Jx-g(Jx,z)Jy-2g(Jx,y)Jz\big). \tag{13}$$

Нека R_X е линейният симетричен оператор на Якоби за тангенциалното пространство M_p, който се дефинира чрез равенството [2]:

$$R_X(u)=R(u,X,X) \quad ,$$

за произволен единичен вектор $X\in S_pM$, в произволна точка $p\in M$. Характеристичното уравнение на R_X относно произволен адаптиран базис $e_1,\ e_2,\ Je_1,\ Je_2$ за тангенциалното пространство M_p, в точката $p\in M$, означаваме с

$$\lambda\big(\lambda^3-A_1(p;X)\lambda^2+A_2(p;X)\lambda-A_3(p;X)\big)=0,$$

където λ е корен на това уравнение.

По-нататък нашата задача е да изследваме 4-мерните почти Ермитови многообразия, за които в произволна точка p от многообразието характеристичните коефициенти на операторите на Якоби R_X и R_{JX} съвпадат. Очевидно условието $A_1(p;X)$ да е J - инвариантен означава, че тензорът на Ричи ρ за многообразието е Ермитов.

Теорема 1. *Ако (M,g,J) е 4-мерно почти Ермитово многообразие, то следните условия са еквивалентни:*

а) *в произволна точка p от многообразието характеристичните коефициенти на операторите на Якоби R_X и R_{JX} съвпадат,*

б) *Тензорът на кривината в произволна точка p от многообразието удовлетворява едно от равенствата* (6) *или* (11) *или* (13).

Доказателство. Нека p е произволна точка от M и нека e_1, e_2, Je_1, Je_2 е произволен адаптиран базис за тангенциалното пространство M_p в точката $p\in M$. От характеристичното уравнение на оператора на Якоби R_{e_1} получаваме следните характеристични коефициенти:

$A_1(p;e_1) = K(e_1,e_2)+H(e_1)+K(e_1,Je_2)$,

$A_2(p;e_1)= R^2(e_2,e_1,e_1,Je_1)+R^2(e_2,e_1,e_1,Je_2)+R^2(Je_1,e_1,e_1,Je_2)-H(e_1)K(e_1,e_2)-(e_1,e_2)K(e_1,Je_2)-H(e_1)K(e_1,Je_2)$,

$A_3(p;e_1) = 2R(e_2,e_1,e_1,Je_1)R(Je_1,e_1,e_1,Je_2)R(e_2,e_1,e_1,Je_2)-H(e_1)R^2(e_2,e_1,e_1,Je_2)-K(e_1,e_2)R^2(Je_1,e_1,e_1,Je_2)-K(e_1,Je_2)R^2(e_2,e_1,e_1,Je_1)+H(e_1)K(e_1,e_2)K(e_1,Je_2)$, където с H е означена холоморфната секционна кривина. Също така, от характеристичното уравнение на оператора на Якоби R_{Je_1} получаваме характеристичните коефициенти:

$A_1(p;Je_1) = K(Je_1,e_2)+H(e_1)+K(Je_1,Je_2)$,

$A_2(p;Je_1)=R^2(e_2,Je_1,Je_1,Je_1)+R^2(e_2,Je_1,Je_1,Je_2)+R^2(e_1,Je_1,Je_1,Je_2)-H(e_1)K(Je_1,e_2)-K(Je_1,e_2)K(Je_1,Je_2)-H(e_1)K(Je_1,Je_2)$,

$A_3(p;Je_1) = 2R(Je_2,Je_1,Je_1,e_1)R(e_1,Je_1,Je_1,e_2)R(Je_2,Je_1,Je_1,e_2)-H(e_1)R^2(e_2,Je_1,Je_1,Je_2) - H(e_1)R^2(e_2,Je_1,Je_1,Je_2) -K(Je_1,Je_2)R^2(e_1,Je_1,Je_1,e_2) -K(Je_1,e_2)R^2(Je_2,Je_1,Je_1,e_1)+H(e_1)\ K(Je_1,Je_2)\ K(Je_1,e_2).$

По-нататък имаме

$$
\begin{aligned}
A_2(p;ae_1+be_2)=&a^4\Big(H(e_1)K(e_1,Je_2)-R^2(Je_1,e_1,e_1,Je_2)+b^4\Big(K(Je_1,e_2)H(e_2)-\\
&R^2(Je_1,e_1,e_1,Je_2)\Big)+2a^3b\Big(H(e_1)\ R(Je_2,e_1,e_2,Je_2)+K(e_1,Je_2)R(Je_1,e_1,e_2,Je_1)\\
&-R(Je_1,e_1,e_1,Je_2)\ \big(R(Je_1,e_1,e_2,Je_2)+R(Je_1,e_2,e_1,Je_2)\big)\\
&+a^2b^2\Big(H(e_1)H(e_2)+4R(Je_1,e_1,e_2,Je_2)\ R(Je_2,e_1,e_2,Je_2)+K(e_1,Je_2)\ K(Je_1,e_2)\\
&-\big(R(Je_1,e_1,e_2,Je_2)+R(Je_1,e_2,e_1,Je_2)\big)-2\ R(Je_1,e_1,e_1,Je_2)\ R(Je_1,e_2,e_2,Je_2\Big)+2ab^3\Big(H(e_2)\\
&R(Je_1,e_1,e_2,Je_1)+K(e_2,Je_1)R(Je_2,e_1,e_2,Je_2)\\
&-R(Je_1,e_2,e_2,Je_2)\big(R(Je_1,e_1,e_2,Je_2)+R(Je_1,e_2,e_1,Je_2)\big)\Big)\\
&+a^2\Big(K(e_1,e_2,)\ H(e_1)+K(e_1,e_2,)\ K(e_1,Je_2)-R^2(e_2,e_1,e_1,Je_1)-R^2(e_2,e_1,e_1,Je_2)\Big)\\
&+2ab\Big(K(e_1,e_2)\ R(Je_1,e_1,e_2,Je_1)+K(e_1,e_2)\ R(Je_2,e_1,e_2,Je_2)\\
&+\ R(e_2,e_1,e_1,Je_1)\ R(e_1,e_2,e_2,Je_1)+R(e_2,e_1,e_1,Je_2)R(e_1,e_2,e_2,Je_2)\ \Big)\\
&+a^2\Big(K(e_1,e_2)\ H(e_1)+K(e_1,e_2,)\ K(e_1,Je_2)-R^2(e_2,e_1,e_1,Je_1)-R^2(e_2,e_1,e_1,Je_2)\Big)\\
&+b^2\Big(K(e_1,e_2)\ K(e_1,Je_2)+K(e_1,e_2)\ H(e_2)-R^2(e_1,e_2,e_2,Je_1)-R^2(e_1,e_2,e_2,Je_2)\Big).
\end{aligned}
$$

Характеристичният коефициент $A_2(p;aJe_1+bJe_2)$ може да се получи от последното равенство след замяна на e_1 с Je_1 и на e_2 с Je_2. Тогава от условието

$$A_2(p;ae_1+be_2) = A_2(p;aJe_1+bJe_2),$$

като използваме резултатите от лема 1 до лема 4, получаваме

$$Aa^4+Bb^4+2Pa^3b+Ca^2b^2+2Qab^3+2Tab+Da^2+Eb^2=0, \tag{14}$$

където a , b са произволни реални числа за които $a^2+b^2=1$ и освен това

$$
\begin{aligned}
(15)\quad & A= R^2(e_1,Je_1,Je_1,e_2) - R^2(Je_1,e_1,e_1,Je_2)\ ,\\
& B= R^2(e_2,Je_2,Je_2,e_1) - R^2(Je_2,e_2,e_2,Je_1)\ ,\\
& C= 6R(Je_1,e_1,e_2,Je_1)\ R(Je_2,e_1,e_2,Je_2)-R(e_1,Je_1,Je_2,e_1)\ R(e_2,Je_1,Je_2,e_2),\\
& D= R^2(Je_2,Je_1,Je_1,e_1) - R^2(e_2,e_1,e_1,Je_1)\ ,\\
& E=R^2(Je_1,Je_2,Je_2,e_2) - R^2(e_1,e_2,e_2,Je_2)\ ,\\
& P= H(e_1)\ R(Je_2,e_1,e_2,Je_2)-K(e_1,e_2)\ R(Je_1,e_1,e_2,Je_1)\\
&\quad -\ R(Je_1,e_1,e_1,Je_2)\ \big(R(Je_1,e_1,e_2,Je_2)+R(Je_1,e_2,e_1,Je_2)\big)\\
&\quad -H(e_1)\ R(e_2,Je_2,Je_1,e_2)-K(e_1,Je_2)\ R(e_1,Je_1,Je_2,e_1)\\
&\quad -\ \big(R(e_1,Je_1,Je_2,e_2)+R(e_1,Je_2,Je_1,Je_2)\ \big)\ R(e_1,Je_1,Je_1,e_2)\\
& Q= H(e_2)\ R(Je_1,e_2,e_1,Je_1)-K(e_1,e_2)\ R(Je_2,e_2,e_1,Je_2)\\
&\quad -\ R(Je_2,e_2,e_2,Je_1)\big(R(Je_2,e_2,e_1,Je_1)+R(Je_2,e_1,e_2,Je_1)\big)\\
&\quad -H(e_2)\ R(e_1,Je_1,Je_2,e_1)-K(e_2,Je_1)\ R(e_2,Je_2,Je_1,e_2)\\
&\quad -\ \big(R(e_2,Je_2,Je_1,e_1)+R(e_2,Je_1,Je_2,Je_1)\ \big)\ R(e_2,Je_2,Je_2,e_1)\ ,\\
& R= K(Je_1,Je_2)\ R(Je_1,e_1,e_2,Je_1)+K(e_1,e_2)\ R(Je_2,e_1,e_2,Je_2)
\end{aligned}
$$

$$+ R(e_2,e_1,e_1,Je_1)\, R(e_1,e_2,e_2,Je_2) - K(Je_1,Je_2)\, R(e_1,Je_1,Je_2,e_1)$$
$$-K(Je_1,Je_2)\, R(e_2,Je_1,e_2,Je_2) - R(Je_2,Je_1,Je_1,e_1)\, R(Je_2,Je_1,Je_1,Je_2)$$
$$- R(Je_2,Je_1,Je_1,e_2)\, R(Je_1,Je_2,Je_2,e_2)\ .$$

Ако в (14) заменим a с $-a$ и сумираме, то получаваме аналогично равенство, което след събиране с последното равенство ни дава:

$$Aa^4+Bb^4+Ca^2b^2+Da^2+Eb^2=0\ .$$

Оттук като положим $x=a^2$ и $y=b^2$ имаме:

$$Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey=0 \tag{16}$$

при условие , че $x+y=1,\ x>0\ ,\ y>0.$ Като изразим това равенство само чрез x имаме:

$$(A+B-C)x^2+(-2B+C+D+E)x+B+E=0\ ,$$

откъдето, съгласно произволността на реалното число x , получаваме системата:

$$A+B-C=0,$$
$$C+D+E=0, \qquad A+D=0, \qquad B+E=0\ . \tag{17}$$

По нататък от тази система, като заменим вектора e_1 с някои линейни комбинации на векторите e_1, Je_1, e_2, Je_2 получаваме нови равенства които след комбиниране с равенствата в (17) ни дават основна релация:

$$A=B=C=D=E=0. \tag{18}$$

Съгласно изразите в (15) оттук получаваме:

$$R^2(e_1,Je_1,J e_1,e_2) - R^2(Je_1,e_1, e_1,Je_2)=0\ ,$$

откъдето след замяна на e_2 с Je_2 следва

$$R^2(e_1,Je_1,Je_1,Je_2) - R^2(Je_1,e_1,e_1,e_2)=0\ ,$$

или

$$\Big(R(e_1,Je_1,Je_1,Je_2) - R(Je_1,e_1,e_1,e_2)\Big)\Big(R(e_1,Je_1,Je_1,Je_2) + R(Je_1,e_1,e_1,e_2)\Big)=0.$$

Това равенство означава, че е в сила поне едно от уравненията:

$$R(Je_1,e_1, e_1,Je_2) - R(e_1,Je_1, Je_1,e_2)=0 \tag{19}$$

или

$$R(Je_1,e_1, e_1,Je_2) - R(e_1,Je_1, Je_1,e_2)=0. \tag{20}$$

Ако първото равенство е в сила, то съгласно доказаната по-горе лема 4 следва, че (M,g,J) е AH_3 -многообразие , т.е. за тензора на кривината R са в сила равенствата (6). В случай, че (19) е в сила , то имаме

$$R(x,Jx,Jx,y)+R(Jx,x,x,Jy)=0$$

за произволни вектори $x\perp y,Jy$, за които $x,y\in S_pM$ в произволна точка $p\in M$. Като приложим това равенство за векторите $tx-y$, $x+ty$ за произволно реално число t, получаваме системата:

$$-H(y)+R(x,Jx,Jy,y)+R(x,Jy,Jx,y)+K(x,Jy)=0,$$
$$H(x)-R(x,Jx,Jy,y)-R(x,Jy,Jx,y)-K(x,Jy)=0.$$

Оттук следват равенствата

$$H(x)=H(y) \tag{21}$$

и

$$H(x)=R(x,Jx,Jy,y)+R(x,Jy,Jx,y)+K(x,Jy)\ . \tag{22}$$

От последното равенство и лема 2 получаваме

$$K(x,Jy)=K(Jx,y). \tag{23}$$

Равенствата (21) - (23) са в сила за произволни вектори $x, y \in S_pM$, за които $x \perp y$, Jy. По-нататък от дефиницията (12) за тензора на кривина R^* имаме

$$R^*(x,Jx,Jx,y)= \frac{1}{2}\Big(R(x,Jx,Jx,y)+ R(Jx,x,x,Jy)\Big),$$
$$R^*(Jx,x,x,Jy)= \frac{1}{2}\Big(R(Jx,x,x,Jy)+R(x,Jx,Jx,y)\Big).$$

От тези равенства и (22) следва:

$$R^*(x,Jx,Jx,y)+ R^*(Jx,x,x,Jy)=0 .$$

Свойствата на R^* дадени по-горе ни дават равенството

$$R^*(x,Jx,Jx,y)=R^*(Jx,x,x,Jy).$$

Следователно $R^*(x,Jx,Jx,Jy)=0,$ откъдето след замяна на x с y получаваме:

$$R^*(y,Jy,Jy,Jx)=0 . \tag{24}$$

Сега като използваме равенствата (21)-(23) за R^* получаваме (11) и следователно в този случай (M,g,J) е почти Ермитово многообразие с постоянна холоморфна секционна кривина. Накрая отбелязваме, че ако са в сила и двете равенства (19) и (20), то многообразието (M,g,J) е AH_3-многообразие с точково постоянна холоморфна секционна кривина и точково постоянна антихоломорфна секционна кривина в точка $p \in M$, т.е. R удовлетворява равенствата (13) [4].

От доказателството на теоремата дотук става ясно, че условието характеристичният коефициент $A_3(p;X)$ на оператора на Якоби R_X да е J-инвариантен следва от условието характеристичните коефициенти $A_2(p;X)$ и $A_3(p;X)$ да са J-инвариантни. Действително ако едно от равенствата (6) или (11) е в сила, то с непосредствена проверка от изразите по-горе установяваме, че $A_3(p;e_1)=A_3(p;Je_1)$, където $e_1(=X)$ е произволен вектор.

По-нататък в параграфа , изследваме $2n$–мерните почти Ермитови многообразия, за които в произволна точка $p \in M$ и за произволен единичен вектор $X \in S_pM$ операторът на Якоби R_X има за собствен вектор JX.

Теорема 2. *(M,g,J) е $2n$-мерно ($n \geq 2$) почти Ермитово многообразие, за което операторът на Якоби R_X има за собствен вектор JX, в произволна точка $p \in M$ тогава и само тогава , когато (M,g,J) е AH_3 -многообразие с точково постоянна холоморфна и точково постоянна антихоломорфна секционна кривина в точката p (т.е. тензорът на кривината R за многообразието (M,g,J) удовлетворява равенството (13)).*

Доказателство. Ако (M,g,J) е 4-мерно AH_3-многообразие с точково постоянна холоморфна секционна кривина $\mu(p)$ и точково постоянна антихоломорфна секционна кривина $\nu(p)$, в произволна точка $p \in M$, то тензорът на кривината R за многообразието има вида (11) и следователно за операторът на Якоби R_X имаме

$$R_X(u)=\mu(p)g(u,JX)JX+\nu(p)\Big(u-g(u,X)X-g(u,JX)JX\Big).$$

Оттук директно следва, че JX е собствен вектор на оператора на Якоби R_X със съответна собствена стойност $\mu(p)$.

Обратно, нека (M,g,J) е произволно почти Ермитово многообразие за което операторът на Якоби R_X има за собствен вектор JX , в произволна точка $p \in M$, със съответна собствена стойност λ . Тогава $R_X(JX)= \lambda JX$, следователно

(25) $$R(JX,X,X,Y)=0 \ ,$$

за произволен вектор $Y \in S_pM$, за който $Y \perp X,\ JX$ и доказателството на обратното твърдение получаваме от следният резултат[4]:

Лема 4. *Нека M е $2n$ - мерно почти Ермитово многообразие и нека за всяка точка $p \in M$ е в сила* (25) *за произволни вектори $x, y \in M_p$, подчинени на $x \perp y,\ Jy$. Тогава M е AH_3-многообразие с точково постоянна холоморфна и точково постоянна антихоломорфна секционна кривина.*

ЛИТЕРАТУРА:

[1] Г.Станилов. Върху геометрията на Римановите и почти Ермитовите многообразия. Дисертация за получаване на НС „Доктор на науките“. София,1977.

[2] В.Видев. Характеризиране на риманови многообразия и модели чрез оператори на кривината. Дисертация за получаване на НС „Доктор на науките“, ШУ“Епископ Контантин Преславски“, 2014 г.

[3] O. Kassabov. On the axiom of planes and the axiom of spheres in the almost Hermitian geometry. Serdica 8 (1982), 109-114

[4] G. Ganchev. Almost Hermitian manifolds similar to the complex space forms. Comptes rendus de l, Academie bulgare des Science, 32 (1979), 1179 - 1182

[5] F. Tricery, L. Vanchecke. Curvature tensors on almost Hermitian manifolds. Trans. Amer. Math. Soc. 2676(1981), 365-398

[6] S. Kobayashi, K. Nomizu. Foundations of differential geometry, vol. 2. Intercsience Publish. New York-London(1969)