Annual of Konstantin Preslavsky University of Shumen
Faculty of Mathematics and Informatics
vol. XXVII C, 2026, pp. 9 – 32, https://doi.org/10.46687/BOXS2454

DYNAMIC MODE DECOMPOSITION: DEVELOPMENT AND MODIFICATIONS*

GYURHAN H. NEDZHIBOV

ABSTRACT: *Dynamic Mode Decomposition (DMD) is a data-driven method for extracting spatial structures and their temporal evolution from sequential measurements. Its connection with the Koopman operator provides a framework for interpreting nonlinear dynamics through the evolution of observable functions. This paper reviews the mathematical foundations of DMD and outlines several developments: exact and improved formulations, online algorithms for streaming data, higher-order DMD for systems with temporal memory, and DMD with control for input-driven dynamics. The methods are discussed in terms of their computational structure, assumptions, and potential applications..*

KEYWORDS: *Dynamic mode decomposition, Koopman operator, singular value decomposition, online algorithms, higher-order DMD, DMD with control, system identification;*

2010 Math. Subject Classification: *37M10, 37N35, 65F15*

ДЕКОМПОЗИЦИЯ НА ДИНАМИЧНИ МОДОВЕ: РАЗВИТИЕ И МОДИФИКАЦИИ

ГЮРХАН Х. НЕДЖИБОВ

Абстракт: *Декомпозицията на динамични модове е метод, базиран на данни, за извличане на пространствени структури и тяхната еволюция във времето от последователни измервания. Връзката му с оператора на Купман осигурява рамка за интерпретиране на нелинейната*

*This paper is (partially) supported by Scientific Research Grant RD-08-91/02.02.2026

динамика чрез еволюцията на наблюдаеми функции. В настоящата статия се разглеждат математическите основи на DMD и се очертават няколко направления в развитието на метода: точни и усъвършенствани формулировки, онлайн алгоритми за поточни данни, DMD от по-висок ред за системи с времева памет и DMD с контрол за динамика, задвижвана от входни въздействия. Методите се обсъждат от гледна точка на тяхната изчислителна структура, допускания и потенциални приложения.

КЛЮЧОВИ ДУМИ: *Декомпозицията на динамични модове (DMD метод), оператор на Купман, разлагане на сингулярни стойности, онлайн алгоритми, DMD от по-висок ред, DMD с контрол.*

2010 MSC: **37M10, 37N35, 65F15.**

1 Въведение

Анализът на сложни динамични системи често е затруднен от нелинейността, взаимодействието между различни времеви мащаби и липсата на достатъчно точен физически модел. Основно предизвикателство се оказва нелинейността, която води до различни явления като бифуркация, множество атрактори, хаос и др. При нелинейните системи няма всеобхватна математическа рамка за прецизно и общо характеризиране (за разлика от линейните динамични системи). В много приложни задачи са налични измервания, получени в последователни моменти от време. Това мотивира развитието на методи, които извличат динамични характеристики непосредствено от данните.

През 1931 г. Б. Купман (Bernard Koopman) представя алтернативен, операторен подход за изследване на динамични системи [1]. Идеята на Купман е да се смени перспективата — вместо да проследяваме движението на точки във фазовото пространство, Купман предлага да изследваме еволюцията на функции върху това пространство — подход, който цели да превърне нелинейната динамика в линеен проблем. Декомпозицията на динамични модове (Dynamic Mode Decomposition, DMD) е метод за анализ на времеви

последователности, който идентифицира пространствени модове и съответните им времеви множители на растеж, затихване или осцилация. Методът е въведен и популяризиран в съвременния си вид от Schmid [2–4] и се използва в механиката на флуидите, анализа на сигнали, редуцираното моделиране и идентификацията на динамични системи.

Целта на настоящата статия е да представи общата математическа рамка на DMD и да систематизира някои от основните направления в развитието му: подобрени алгоритми за изчисляване на модовете, онлайн DMD, DMD от по-висок ред и DMD с контрол. Представени са подобрени и алтернативни алгоритмични схеми, осигуряващи висока изчислителна ефективност.

2 Оператор на Купман и връзка с DMD

Анализът и управлението на нелинейни динамични системи представляват едно от основните предизвикателства в съвременната математика и инженерните науки. Традиционните подходи за изследване на подобни системи често се основават на анализ на нелинейните уравнения, описващи еволюцията на състоянието. В много случаи обаче този анализ е затруднен от сложната структура на уравненията и от взаимодействието между отделните динамични променливи.

Важна теоретична основа за развитието на методи за анализ на динамични системи е операторният подход на Бърнард Купман (Bernard Koopman) [1]. Основната идея на този подход е нелинейната динамика в пространството на състоянията да се изследва чрез еволюцията на функции, дефинирани върху това пространство. По този начин нелинейната динамична система може да бъде представена чрез линеен оператор, действащ върху пространство от функции, наречени наблюдаеми функции (observables). В общия случай операторът на Купман е безкрайномерно представен, което позволява да се разглежда

широк клас от нелинейни динамични системи в рамките на линейната операторна теория.

Нека разгледаме автономна дискретна динамична система, зададена чрез зависимостта

$$\mathbf{x_{n+1}} = \mathbf{F}(\mathbf{x_n}), \qquad \mathbf{x_n} \in M \subseteq \mathbb{C}^m, \tag{1}$$

където $\mathbf{x_n}$ е векторът на състоянието в дискретния момент n, M е пространството на допустимите състояния, а $\mathbf{F}$ е функцията, определяща еволюцията на системата. Автономността означава, че преходът към следващото състояние се определя от текущото състояние, без изрично участие на независим външен времеви параметър или управляващ вход.

Нека g е скаларна наблюдаема функция, която асоциира числова стойност на всяко състояние на системата. Наблюдаемите функции могат да представляват както отделни компоненти на състоянието, така и по-сложни функции на тези компоненти. Наблюдаемите функции обикновено се разглеждат като елементи на подходящо функционално пространство, например Хилбертово пространство $\mathcal{H}$. При подходящи условия операторът на Купман може да се представи като линейно изображение

$$\mathbf{K}: \mathcal{H} \to \mathcal{H}.$$

Въпреки че първоначалната система може да има крайномерно пространство на състоянията, пространството на наблюдаемите функции и съответният оператор на Купман в общия случай са безкрайномерни. Именно тази особеност позволява нелинейната динамика да се изследва чрез спектрални и операторни методи, характерни за линейния анализ.

Операторът на Купман K се дефинира чрез композицията на наблюдаемата функция g с функцията на еволюцията F:

$$(\mathbf{K}g)(\mathbf{x_n}) = g\big(\mathbf{F}(\mathbf{x_n})\big) = g(\mathbf{x_{n+1}}). \tag{2}$$

Следователно действието на оператора на Купман се състои в преобразуване на наблюдаемата функция така, че нейната стойност в текущото състояние да се замени със стойността ѝ в следващото състояние. Важно свойство на този оператор е

неговата линейност по отношение на наблюдаемите функции. За произволни скалари $a, b \in \mathbb{C}$ и наблюдаеми функции g_1 и g_2 е изпълнено

$$\mathbf{K}(ag_1 + bg_2) = a\mathbf{K}g_1 + b\mathbf{K}g_2.$$

Това свойство е в сила независимо от това дали функцията **F**, описваща първоначалната динамика, е линейна или нелинейна. Следователно линейността се отнася до действието на оператора върху пространството на наблюдаемите функции, а не непременно до еволюцията на самия вектор на състоянието.

От практическа гледна точка безкрайномерният характер на оператора създава съществени изчислителни трудности. Поради това в приложенията се търсят крайномерни апроксимации, които да възпроизвеждат съществените характеристики на динамиката. Един от основните методи за тази цел е декомпозицията на динамични модове (Dynamic Mode Decomposition, DMD). Методът извлича динамична информация непосредствено от последователности от измервания, без да изисква предварително извеждане на управляващите физични уравнения на системата.

В стандартната си форма DMD може да се интерпретира като апроксимация на действието на оператора на Купман върху крайномерно пространство от наблюдаеми, избрани така, че да съответстват на измерваните променливи на системата. При този подход динамичната информация се извлича от последователни състояния, а спектралните характеристики на апроксимирания оператор се използват за определяне на динамичните модове и тяхната времева еволюция. По този начин DMD осигурява практически инструмент за анализ на сложни динамични процеси, като същевременно запазва концептуалната връзка с теорията на Купман.

Следва да се отбележи, че стандартният DMD не възстановява целия безкрайномерен оператор на Купман, а предоставя крайномерно приближение, чието качество зависи от наличните данни, избора на наблюдаеми функции, ранга на редукцията и свойствата на изследваната динамична система. Това

ограничение мотивира развитието на разширения и модификации на DMD, включително методи с разширен набор от наблюдаеми, DMD от по-висок ред и DMD с контрол, които позволяват да се отчитат допълнителни особености на динамиката.

3 Математическа рамка на стандартния DMD

Методът на декомпозиция на динамични модове (Dynamic Mode Decomposition, DMD) представлява числен метод за извличане на характерните пространствени структури и времеви зависимости от последователност от измерени или изчислени състояния на динамична система [2-4]. За разлика от методите, които изискват предварително зададен математически модел на процеса, DMD използва данни, получени в последователни моменти от времето, за да конструира линейно представяне на наблюдаваната динамика. Това го прави приложим при анализ на сложни процеси, за които аналитичното описание е трудно или недостъпно.

Нека е дадена последователност от m вектора на състоянието,

$$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m, \qquad \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n, \tag{3}$$

получени през равни интервали от време Δt. Всеки вектор $\mathbf{x_k}$ съдържа n измерими величини, описващи състоянието на системата в момента t_k. В зависимост от конкретното приложение тези величини могат да представляват пространствени стойности на физично поле, координати и скорости на механична система или други характеристики на изследвания процес.

Основната идея на стандартния DMD е да се намери линейно преобразуване, което апроксимира прехода между последователни състояния:

$$\mathbf{x}_{k+1} \approx \mathbf{A}\mathbf{x}_k, \tag{4}$$

където $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ е матрица на динамиката. Дори когато първоначалната система е нелинейна, подобна линейна апроксимация може да осигури полезно описание на

наблюдаваната еволюция в пространството на измерените състояния. В общия случай обаче матрицата $\mathbf{A}$ не се конструира непосредствено, тъй като размерността n може да бъде голяма, при ограничен брой наблюдения.

За тази цел последователността от състояния се организира в две матрици на наблюденията:

$$\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{x}_{m-1}], \tag{5}$$
$$\mathbf{Y} = [\mathbf{x}_2 \quad \mathbf{x}_3 \quad \cdots \quad \mathbf{x}_m].$$

Така $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n\times(m-1)}$, като всяка колона на $\mathbf{Y}$ съответства на състоянието, непосредствено следващо съответното състояние в $\mathbf{X}$. Моделът на DMD може да бъде записан компактно във вида

$$\mathbf{Y} \approx \mathbf{AX}. \tag{6}$$

В рамките на метода матрицата $\mathbf{A}$ се оценява чрез метода на най-малки квадрати. При пълнорангово $\mathbf{X}$ и наличие на съответната обратна матрица решението може да се представи като $\mathbf{A} = \mathbf{Y}\mathbf{X}^{\dagger}$, където $\mathbf{X}^{\dagger}$ е псевдообратната матрица на Мур–Пенроуз. На практика обаче е по-ефективно да се използва сингулярното разлагане на $\mathbf{X}$, което позволява намаляване на размерността и потискане на част от числените ефекти, свързани с шум и излишни степени на свобода.

АЛГОРИТЪМ 1: Изчислителен алгоритъм на стандартния DMD

Стъпка 1. Сингулярно разлагане и редукция на размерността. Матрицата $\mathbf{X}$ се представя чрез сингулярно разлагане:

$$\mathbf{X} = \mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^{*},$$

където $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ съдържат левите и десните сингулярни вектори, $\mathbf{\Sigma}$ е диагоналната матрица на сингулярните стойности, а символът $(\cdot)^*$ означава транспониране и комплексно спрегнато действие. За намаляване на изчислителната сложност се запазват само r водещи сингулярни стойности, което дава редуцираното разлагане

$$\mathbf{X} \approx \mathbf{U}_r\mathbf{\Sigma}_r\mathbf{V}_r^*.$$

Изборът на ранга r определя размерността на редуцираното пространство. Той може да се основава на относителния принос на сингулярните стойности, на предварително зададен праг или на други критерии за редукция.

Стъпка 2. Конструиране на редуцирания оператор. Вместо да се оценява непосредствено матрицата $\mathbf{A}$ с размерност $n \times n$, се конструира редуциран оператор в пространството, породено от водещите леви сингулярни вектори:

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \mathbf{U}_r^*\mathbf{Y}\mathbf{V}_r\mathbf{\Sigma}_r^{-1}.$$

Матрицата $\widetilde{\mathbf{A}} \in \mathbb{C}^{r\times r}$ описва апроксимираната динамика в редуцираното пространство. Този подход значително намалява изчислителните разходи, когато $r \ll n$, като същевременно запазва доминиращите компоненти на данните.

Стъпка 3. Спектрален анализ на редуцирания оператор. Изчисляват се собствените стойности и собствените вектори на $\widetilde{\mathbf{A}}$:

$$\widetilde{\mathbf{A}}\mathbf{W} = \mathbf{W},$$

където $\mathbf{\Lambda} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ е диагоналната матрица на собствените стойности, а колоните на $\mathbf{W}$ са съответните собствени вектори. Собствените стойности λ_j характеризират времевата еволюция на динамичните компоненти, докато свързаните с тях DMD модове описват пространствените структури.

Стъпка 4. Изчисляване на DMD модовете. При стандартната формула за точните DMD модове (exact DMD) се използва изразът

$$\mathbf{\Phi} = \mathbf{Y}\mathbf{V}_r\mathbf{\Sigma}_r^{-1}\mathbf{W},$$

където $\mathbf{\Phi} = [\boldsymbol{\phi}_1, \dots, \boldsymbol{\phi}_r]$ е матрицата на DMD модовете. Всеки мод $\boldsymbol{\phi}_j$ представлява пространствена структура, свързана със собствената стойност λ_j. За разлика от собствените вектори на редуцирания оператор, точните DMD модове се изразяват в пространството на първоначалните измервания. Това позволява непосредственото им интерпретиране спрямо физичните величини, съдържащи се във векторите на състоянието.

Стъпка 5. Определяне на началните амплитуди. След като модовете са изчислени, началното състояние се представя чрез линейна комбинация на тези модове. В стандартния вариант амплитудите се определят от задачата за най-малки квадрати:

$$\mathbf{b} = \mathbf{\Phi}^{\dagger}\mathbf{x}_1,$$

където $\mathbf{\Phi}^{\dagger}$ е псевдообратната матрица на $\mathbf{\Phi}$, а $\mathbf{b} = [b_1, \dots, b_r]^T$ е векторът на началните амплитуди. Величината b_j определя приноса на съответния мод към реконструкцията на началното състояние. При пълна колонорангова матрица на модовете псевдообратната матрица осигурява решение с минимална евклидова норма на остатъка.

Стъпка 6. Реконструкция и прогнозиране на динамиката. След определяне на модовете, собствените стойности и началните амплитуди, последователността на състоянията може да бъде апроксимирана чрез модално представяне. За дискретния момент $t_k = t_1 + (k-1)\Delta t$ реконструкцията се записва като

$$\boxed{\mathbf{x}_k \approx \mathbf{\Phi}\mathbf{\Lambda}^{k-1}\mathbf{b}, \qquad k = 1, \dots, m.} \tag{7}$$

Формула (7) изразява всеки вектор на състоянието като линейна комбинация на DMD модовете, чиито амплитуди се изменят във времето съобразно степените на съответните собствени стойности. За k=1 се получава началното модално представяне $\mathbf{x}_1 \approx \mathbf{\Phi}\mathbf{b}$, а за следващите моменти динамиката се описва чрез $\mathbf{\Lambda}^{k-1}$. Следователно собствените стойности определят

времевото развитие на отделните модове, а модовете задават разпределението на техния принос в пространството на състоянията.

Когато собствената стойност λ_j е комплексна, тя може да се запише във вида $\lambda_j = \rho_j e^{i\theta_j}$. При равномерно времево дискретизиране модът има характерна честота $f_j = \theta_j/(2\pi\Delta t)$, докато величината ρ_j определя изменението на амплитудата му между последователни времеви стъпки. При $\rho_j < 1$ съответната компонента затихва, при $\rho_j > 1$ нараства, а при $\rho_j = 1$ амплитудата ѝ остава постоянна в идеализирания дискретен модел. За комплексните модове реалното физично състояние се получава чрез съчетаване на комплексно-спрегнатите компоненти или чрез вземане на реалната част на реконструираното представяне, когато това е съвместимо с конкретния модел.

Тази модална форма позволява не само реконструкция на наличните данни, но и прогнозиране за моменти след края на наблюдаваната последователност, като в (7) се използват съответните бъдещи стойности на индекса k. Точността на подобна прогноза зависи от качеството на данните, избрания ранг r, наличието на шум и доколко линейният оператор приближава действителната динамика в разглеждания времеви интервал.

По този начин стандартният DMD предоставя единна процедура за редукция на размерността, извличане на динамични модове и построяване на модално представяне на измерените състояния. Наред с предимствата си методът има и ограничения: резултатите могат да бъдат чувствителни към шума, избора на ранг и дължината на наблюдаваната последователност, а стандартната формулировка не включва изрично външни управляващи въздействия. Тези ограничения мотивират развитието на различни модификации, сред които подобрени алгоритми за изчисляване на модовете, онлайн варианти, DMD с контрол (DMDc) и методи от по-висок ред.

4 Основни модификации на DMD

4.1 Подобрени алгоритми за точен DMD

Стандартният DMD се основава на оценяване на линейния оператор, който апроксимира прехода между последователни състояния, и на последващ спектрален анализ. Въпреки широката приложимост на този подход, числената му реализация може да бъде повлияна от ранга и обусловеността на матриците от данни, наличието на измервателен шум и начина на изчисляване на DMD модовете. Това мотивира разработването на алтернативни алгоритми, които подобряват изчислителната ефективност и надеждността на спектралната апроксимация [5-7].

Подобрен Точен DMD алгоритъм [5-6]. Нека са дадени матриците на моментните снимки $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ в (5), както и редуцираното сингулярно разлагане

$$\mathbf{X} \approx \mathbf{U}_r\mathbf{\Sigma}_r\mathbf{V}_r^*.$$

Редуцираният DMD оператор се определя чрез

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \mathbf{\Sigma}_r^{-1}\mathbf{U}_r^*\mathbf{Y}\mathbf{V}_r. \quad (8)$$

След решаване на собствената задача

$$\widetilde{\mathbf{A}}\mathbf{W} = \mathbf{W}\mathbf{\Lambda},$$

където $\mathbf{\Lambda}$ съдържа собствените стойности, точните DMD модове се получават като

$$\mathbf{\Phi} = \mathbf{Y}\mathbf{V}_r\mathbf{W}. \quad (9)$$

Тази схема подобрява макар и малко изчислителната сложност на стандартната схема на DMD метода.

Точен DMD метод за данни с пълен ранг [7]. В случай, че входните данни са с пълен ранг, то редуцираната матрица $\widetilde{\mathbf{A}}$ може да се получи чрез формулата:

$$\widetilde{\mathbf{A}}=\mathbf{X}^{\dagger}\mathrm{Y}. \quad (10)$$

От спектрално разлагане на $\widetilde{\mathbf{A}}$

$$\widetilde{\mathbf{A}}\mathbf{W}=\mathbf{W}\mathbf{\Lambda}$$

се определя матрицата на DMD модовете, която в този случай има вида

(11) $\mathbf{\Phi}=\boldsymbol{Y}\mathbf{W}$.

Подобрените алгоритми могат да се различават по начина, по който оценяват оператора и изчисляват модовете. Например, при подходи, ориентирани към пълнорангови набори от данни, целта е да се избегне ненужно отхвърляне на компоненти, които могат да носят значима динамична информация.

Важно е да се отбележи, че различните формулировки не са непременно еквивалентни при произволни данни и при различни критерии за редукция. Изборът на алгоритъм следва да отчита размерността на състоянието, числената обусловеност, наличието на шум и целта на анализа. Въпреки тези различия общият принцип остава един и същ: извличане на спектрална информация за динамиката чрез линейна апроксимация на последователни наблюдения.

4.2 Онлайн DMD за поточни данни

Стандартният метод за Декомпозиция на динамични модове изисква предварително да е наличен целият набор от моментни снимки на разглежданата динамична система. Това ограничение затруднява приложението му при анализ на поточни данни, които постъпват последователно във времето. За преодоляването му е разработен онлайн DMD, при който апроксимацията на DMD оператора се актуализира при получаването на нови наблюдения, без да е необходимо повторно обработване на всички налични данни. Идеята за онлайн DMD е предложена от Hemati и съавтори [8], а впоследствие е развита от Zhang [9]. Настоящото изложение освен основната математическа рамка на онлайн DMD метода разглежда и алтернативни реализации, насочени към намаляване на изчислителните разходи [10, 11].

Нека са дадени двойки вектори $(\mathbf{x_j}, \mathbf{y_j})$, където $\mathbf{x_j}, \mathbf{y_j} \in \mathbb{R}^m$ описва състоянието на системата в даден момент. Предполага се, че тези вектори са свързани приблизително чрез линеен оператор A, т.е.

$$\mathbf{y_j} \approx \mathbf{A x_j}.$$

След постъпването на k двойки се формират матриците

$$\mathbf{X_k} = [\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \dots, \mathbf{x_k}], \qquad \mathbf{Y_k} = [\mathbf{y_1}, \mathbf{y_2}, \dots, \mathbf{y_k}],$$

които имат размерност $m \times k$. Както при стандартния DMD, операторът се определя чрез метод на най-малките квадрати:

$$\mathbf{A_k} = \mathbf{arg\,min_A} |\mathbf{Y_k} - \mathbf{A X_k}|_\mathbf{F}^\mathbf{2}.$$

При пълен ранг по редове на $\mathbf{X_k}$ решението може да се запише във вида

$$\mathbf{A_k} = \mathbf{Y_k X_k^\dagger} = \mathbf{Y_k X_k^T} \left(\mathbf{X_k X_k^T}\right)^{-\mathbf{1}},$$

където $\mathbf{X_k^\dagger}$ е псевдообратната матрица на $\mathbf{X_k}$. Онлайн формулировката позволява тази оценка да се актуализира рекурентно, вместо да се изчислява отново при всяко постъпване на нови данни.

В основната схема се въвежда помощната матрица

$$\mathbf{P_k} = \left(\mathbf{X_k X_k^T}\right)^{-\mathbf{1}}. \tag{12}$$

При получаване на новата двойка $(\mathbf{x_{k+1}}, \mathbf{y_{k+1}})$ операторът и помощната матрица се актуализират чрез

$$\mathbf{A_{k+1}} = \mathbf{A_k} + \boldsymbol{\gamma}_{\mathbf{k+1}} (\mathbf{y_{k+1}} - \mathbf{A_k x_{k+1}}) \mathbf{x_{k+1}^T P_k} \tag{13}$$

където

$\mathbf{P_{k+1}} = \mathbf{P_k} - \boldsymbol{\gamma}_{\mathbf{k+1}} \mathbf{P_k x_{k+1} x_{k+1}^T P_k}$ и $\boldsymbol{\gamma}_{\mathbf{k+1}} = \left(\mathbf{1} + \mathbf{x_{k+1}^T P_k x_{k+1}}\right)^{-\mathbf{1}}$.

Тези зависимости реализират рекурентна актуализация от типа на метода на рекурсивните най-малки квадрати. След актуализацията могат да се извършат спектрално разлагане на оператора, определяне на DMD модовете и собствените стойности, както и реконструкция на динамиката.

Алтернативна схема на Онлайн DMD [10]. За намаляване на изчислителните разходи може да се използва редуциран онлайн DMD оператор. Нека $\mathbf{X_k}$ има редуцирано сингулярно разлагане

$$\mathbf{X_k} = \mathbf{U_k \Sigma_k V_k^T},$$

където $\mathbf{U_k}$ съдържа ортонормиран базис на разглежданото подпространство, а $\mathbf{\Sigma_k}$ съдържа съответните сингулярни стойности. Вместо пълния оператор $\mathbf{A_k}$ се разглежда редуцираният оператор

$$\widetilde{\mathbf{A}}_\mathbf{k} = \mathbf{U_k^T A_k U_k} = \mathbf{U_k^T Y_k V_k \Sigma_k^{-1}}.$$

Той действа в редуцирано пространство с размерност r, където r е избраният ранг на апроксимацията. При постъпване на нова двойка данни актуализацията може да се извършва чрез обновяване на сингулярното разлагане, без да се пресмята отново разлагането на цялата матрица $\mathbf{X_{k+1}}$.

По-конкретно, за тази цел се конструира матрицата

$$\mathbf{B_k} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma_k} & \mathbf{U_k^T x_{k+1}} \end{bmatrix}, \tag{14}$$

която е с размерност $r \times (r+1)$ и икономично сингулярно разлагане:

$$\mathbf{B_k} = \widetilde{\mathbf{U}}_\mathbf{k} \widetilde{\mathbf{\Sigma}}_\mathbf{k} \widetilde{\mathbf{V}}_\mathbf{k}^*$$

като при това

$$\mathbf{\Sigma_{k+1}} = \widetilde{\mathbf{\Sigma}}_\mathbf{k} \qquad \text{и} \qquad \mathbf{U_{k+1}} = \mathbf{U_k} \widetilde{\mathbf{U}}_\mathbf{k}.$$

където $\mathbf{U_k} \in \mathrm{R}^{n \times r}$, $\boldsymbol{V_k} \in \mathrm{R}^{k \times r}$, $\boldsymbol{\Sigma_k} \in \mathrm{R}^{r \times r}$ са от редуцирано SVD: $\mathbf{X_k} = \mathbf{U_k \Sigma_k V_k^*}$ и $\mathrm{r} = \mathbf{rank}(\mathbf{X_k})$. Тогава при постъпване на нова двойка вектори актуализираният оператор се пресмята чрез формулата:

$$\widetilde{\mathbf{A}}_\mathbf{k+1} = \widetilde{\mathbf{U}}_\mathbf{k}^* \left(\widetilde{\mathbf{A}}_\mathbf{k} \mathbf{\Sigma_k^2} + \mathbf{U_k^* y_{k+1} x_{k+1}^* U_k} \right) \widetilde{\mathbf{U}}_\mathbf{k} \mathbf{\Sigma_{k+1}^{-2}}. \tag{15}$$

Допълнително подобрение на изчислителната ефективност се постига чрез използването на помощната матрица:

$$\mathbf{B_k} = \mathbf{\Sigma_k^2} + \mathbf{U_k^T x_{k+1} x_{k+1}^T U_k}. \tag{16}$$

Тя има структура от тип diagonal plus rank-one (DPR1). Използването на тази структура позволява актуализирането на редуцирания оператор да се организира така, че да се избегнат част от излишните матрични операции. По този начин се намаляват изчислителните разходи при последователна обработка на големи потоци от данни [11].

След всяко обновяване могат да се изчислят или актуализират собствените стойности и DMD модовете на оценения оператор. В зависимост от конкретната реализация това може да се осъществи чрез повторно спектрално разлагане на актуалния оператор или чрез рекурентни схеми, които поддържат редуцирано представяне. Разработките в областта на онлайн DMD включват както методи за поточна обработка на данни, така и алтернативни и претеглени варианти [10–11].

4.3 DMD от по-висок ред и разширени матрици

Стандартната декомпозиция на динамични модове (Dynamic Mode Decomposition, DMD) апроксимира динамиката на системата чрез линейна зависимост между две последователни моментни снимки на състоянието. Това представяне е ефективно при системи, за които информацията в текущото състояние е достатъчна за описване на следващата стъпка. При динамики с по-сложни времеви зависимости обаче едностъпковият модел може да не отразява достатъчно добре влиянието на предходните състояния. В такива случаи се използва DMD от по-висок ред (Higher-Order Dynamic Mode Decomposition, HODMD), при който текущото състояние се апроксимира чрез линейна комбинация на няколко предходни състояния.

Нека $\mathbf{x_k} \in \mathbb{R}^m$ обозначава измереното състояние на системата в дискретния момент k. Моделът от ред *s* се записва във вида

$$\mathbf{x_{k+1}} \approx \mathbf{A_1 x_k} + \mathbf{A_2 x_{k-1}} + \cdots + \mathbf{A_s x_{k-s+1}}, \quad (17)$$

където $\boldsymbol{A_1, \ldots, A_s} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ са матрици, определящи влиянието на текущото и предходните състояния върху следващата стъпка. Параметърът d задава броя на включените последователни състояния и по този начин определя времевия обхват на модела.

Основната идея на HODMD е тази зависимост да се преобразува в едностъпкова линейна система чрез въвеждане на разширен вектор на състоянието. За тази цел се дефинира

Тогава моделът може да се представи във вида

(18) $\mathbf{z_{k+1}} = \boldsymbol{\mathcal{A}}\mathbf{z_k}$ за $k = 1,2,\dots,n-s,$

където

(19) $$\mathbf{z_k} = \begin{bmatrix} \mathbf{x_k} \\ \mathbf{x_{k+1}} \\ \vdots \\ \mathbf{x_{k+s-1}} \end{bmatrix}$$

и $$\boldsymbol{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{A_1} & \mathbf{A_2} & \mathbf{A_3} & \dots & \mathbf{A_{s-1}} & \mathbf{A_s} \end{bmatrix},$$

където $\mathbf{0}$ е нулева, а $\mathbf{I}$ единична матрица от ред m.

Първите блокови редове осигуряват преместването на предходните състояния в разширения вектор, а последният блоков ред описва прогнозата за новото състояние. По този начин моделът от по-висок ред се свежда до стандартна едностъпкова линейна зависимост в пространство с по-висока размерност. Тази конструкция е сродна с блоковите представяния, използвани при анализа на операторната динамика, тъй като включва информация за последователността на състоянията, а не само за единична моментна снимка.

При s=1 разширеният вектор съвпада с първоначалното състояние и моделът се свежда до стандартния DMD. При s>1 се включва допълнителна времева информация, която може да подобри представянето на динамики с изразена времева памет. Следователно изборът на реда s е важен етап при изграждането на модела: твърде малка стойност може да не улови съществените времеви зависимости, докато прекалено голяма стойност увеличава размерността на разширената система и изчислителните разходи.

Схемата на Le Clainche и Vega [12] се основава на използването на времева информация от множество моментни снимки, за да се извлекат динамични компоненти, които може да

не се проявяват достатъчно ясно при едностъпковото представяне. При практическата реализация се прилага редукция на размерността чрез SVD, след което се извършва DMD анализ върху подходящо разширените данни. Този подход позволява да се обработват сложни сигнали и динамични процеси, без да е необходимо първоначално да се задава аналитичен модел на системата.

Тъй като DMD операторът $\boldsymbol{\mathcal{A}} \in \mathbb{C}^{s.m \times s.m}$ може да е с много голяма размерност, то идеята на HODMD представена от Le Clainche и Vega през 2017 г. Да се приложи схемата на DMD върху редуцирана система от данни. За целта:

1. Прилага се (икономично) сингулярно разлагане на първоначалната матрица от данни $\mathcal{D} = \{\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \dots, \mathbf{x_n}\}$:

$$\mathcal{D} = \mathbf{U_{\mathcal{D}} \Sigma_{\mathcal{D}} V_{\mathcal{D}}^*} ;$$

2. Конструира се редуцирана система от данни

$$\widetilde{\mathcal{D}} = \mathbf{U_{\mathcal{D}}^* \mathcal{D}}.$$

След, което се получава представяне от вида (28) и се прилага алгоритъмът на DMD метода. С други думи подходът е еквивалентен на стандартен DMD върху:

$$\mathbf{Y_{aug}} = \boldsymbol{\mathcal{A}} \mathbf{X_{aug}} \tag{20}$$

където

$$\mathbf{X_{aug}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_1 & \dots & \tilde{\mathbf{x}}_{n-s} \\ \tilde{\mathbf{x}}_2 & \dots & \tilde{\mathbf{x}}_{n-s+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{\mathbf{x}}_s & \dots & \tilde{\mathbf{x}}_{n-1} \end{bmatrix} \tag{21}$$

$$\text{и} \quad \mathbf{Y_{aug}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_2 & \dots & \tilde{\mathbf{x}}_{n-s+1} \\ \tilde{\mathbf{x}}_3 & \dots & \tilde{\mathbf{x}}_{n-s+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{\mathbf{x}}_{s+1} & \dots & \tilde{\mathbf{x}}_n \end{bmatrix}.$$

Подобрен алгоритъм на HODMD [13-14]. Разширените матрици могат да бъдат организирани и обработвани по начин, който използва тяхната блокова структура. Така могат

да се избегнат част от излишните изчисления, свързани с изричното формиране и обработване на пълната разширена система. Различните варианти на HODMD се различават по начина на построяване на разширените матрици, редукцията на ранга и изчисляването на динамичните модове. Прилагането им изисква съобразяване с размерността на данните, избрания ред (d) и числената устойчивост на съответната реализация.

Ако се използва следното блочно представяне на оператора $\boldsymbol{\mathcal{A}}$:

$$\boldsymbol{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{A_1} & \mathbf{A_{2:s}} \end{bmatrix},$$

където $\mathbf{0}$ е нулева матрица с размерност $(s-1)m \times m$, I е единична матрица с размерност $(s-1)m \times (s-1)m$, $\mathbf{A_1} \in C^{m \times m}$ и $\mathbf{A_{2:s}} \in C^{m \times (s-1)m}$ е следната блочна матрица:

$$\mathbf{A_{2:s}} = [\mathbf{A_2}| \ldots |\mathbf{A_s}].$$

Разширените матрици $\mathbf{X_{aug}}$ и $\mathbf{Y_{aug}}$, имат следното блочно представяне:

$$\mathbf{X_{aug}} = \begin{bmatrix} \mathbf{X_1} \\ \mathbf{X_2} \\ \vdots \\ \mathbf{X_s} \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{Y_{aug}} = \begin{bmatrix} \mathbf{X_2} \\ \mathbf{X_3} \\ \vdots \\ \mathbf{X_{s+1}} \end{bmatrix}$$

където $\mathbf{X_i} \in C^{m \times (n-s+1)}$ е подматрицата

$$\mathbf{X_i} = [\mathbf{x_i}|\mathbf{x_{i+1}} \ldots |\mathbf{x_{n-s+i-1}}]$$

за $i = 1, \ldots, s+1$.

След съответни преобразувания, се достига до следното представяне:

$$\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{A}}} = \boldsymbol{U}_{1;s-1}^{*} \boldsymbol{U}_{2;s} + \boldsymbol{U}_{s}^{*} \boldsymbol{X}_{s+1} \boldsymbol{V}_{X} \boldsymbol{\Sigma}_{X}^{-1}, \quad (22)$$

за редуцирания DMD оператор с размерност $r \times r$, където $\mathbf{U_i} \in C^{m \times r}$ са подматриците на

$$\mathbf{U_X} = \begin{bmatrix} \mathbf{U_1} \\ \mathbf{U_2} \\ \vdots \\ \mathbf{U_s} \end{bmatrix} \quad \text{от} \quad \mathbf{X_{aug}} = \mathbf{U_X \Sigma_X V_X^*}.$$

HODMD намира приложение при анализ и прогнозиране на времеви редове, в които динамиката не се описва достатъчно добре чрез преходи между две съседни измервания. Например при маневриране на морски плавателни съдове вълновите въздействия и взаимодействието между различните компоненти на движението могат да доведат до времеви зависимости, които е полезно да се представят чрез последователност от предходни състояния.

Основното предимство на DMD от по-висок ред е възможността да се представят по-сложни времеви зависимости чрез разширено състояние. Това обаче се постига с цената на по-голяма размерност, допълнителни изчисления и необходимост от обоснован избор на реда на модела и параметрите на редукцията. Поради това HODMD е най-подходящ, когато наличните данни показват, че едностъпковото представяне е недостатъчно, а включването на информация от предходни моменти може да подобри идентификацията или прогнозата.

4.4. DMD с контрол

При системи, подложени на външни управляващи въздействия, динамиката не се определя единствено от текущото състояние. В такива случаи DMD с контрол (Dynamic Mode Decomposition with Control, DMDc) включва управляващия вход във формулировката на модела. Схемата е предложена от Proctor и съавтори в [15]. Основната зависимост се записва като

$$\mathbf{x}_{k+1} \approx \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k, \tag{23}$$

където $\mathbf{x}_k$ е векторът на състоянието, $\mathbf{u}_k$ е управляващият вход, $\mathbf{A}$ описва динамиката, свързана със състоянието, а $\mathbf{B}$ характеризира влиянието на управляващите въздействия.

Нека $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ са матриците на текущите и следващите състояния:

$$\mathbf{X} = [\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \dots, \mathbf{x_{n-1}}], \quad \mathbf{Y} = [\mathbf{x_2}, \mathbf{x_3}, \dots, \mathbf{x_n}],$$

а $\boldsymbol{\Upsilon}$ съдържа съответните управляващи входове

$$\boldsymbol{\Upsilon} = [\boldsymbol{u_0}, \dots, \boldsymbol{u_{n-1}}],$$

където $\boldsymbol{u_i} \in \mathbb{C}^q$е вектор на контролните параметри, а q е броят на тези параметри. Тогава моделът за всички наблюдавани двойки може да бъде представен във вида

$$\mathbf{Y} \approx \mathbf{AX} + \mathbf{B}\boldsymbol{\Upsilon}. \tag{24}$$

Това уравнение може да се представи чрез разширени матрици по-следния начин:

$$\mathbf{Y} = [\mathbf{A} \quad \mathbf{B}] \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \boldsymbol{\Upsilon} \end{bmatrix} = \mathbf{G\Omega}$$

където

$$\mathbf{G} = [\mathbf{A}\ \mathbf{B}] \in \mathbb{C}^{m\times(m+q)} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \boldsymbol{\Upsilon} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{(m+q)\times(n-1)}.$$

Тогава под DMD с контрол на тройката $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \boldsymbol{\Upsilon})$ се има предвид спектралната декомпозиция на оператор A.

Нека имаме редуцирана сингулярна декомпозиция от ред p:

$$\boldsymbol{\Omega} \approx \widetilde{\mathbf{U}}\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}\widetilde{\mathbf{V}}^*, \tag{25}$$

където $\widetilde{\mathbf{U}} \in \mathbb{C}^{(m+q)\times p}$, $\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}} \in \mathbb{C}^{p\times p}$ и $\widetilde{\mathbf{V}} \in \mathbb{C}^{n\times p}$ и нека

$$\mathbf{Y} \approx \widehat{\mathbf{U}}\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}\widehat{\mathbf{V}}^*, \tag{26}$$

редуцирана сингулярна декомпозиция на $\mathbf{Y}$, където $\widehat{\mathbf{U}} \in \mathbb{C}^{m\times r}$, $\widehat{\boldsymbol{\Sigma}} \in \mathbb{R}^{r\times r}$ и $\widehat{\mathbf{V}} \in \mathbb{C}^{n\times r}$, а r задава размерността на подпространството. Тогава за редуцираните апроксимации на операторите A и B, получаваме:

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \widehat{\mathbf{U}}^*\mathbf{Y}\widetilde{\mathbf{V}}\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}\widetilde{\mathbf{U}}_1^*\widehat{\mathbf{U}} \quad \in \mathbb{C}^{r\times r} \tag{27}$$

и

$$\widetilde{\mathbf{B}} = \widehat{\mathbf{U}}^*\mathbf{Y}\widetilde{\mathbf{V}}\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}\widetilde{\mathbf{U}}_2^* \quad \in \mathbb{C}^{r\times q} \tag{28}$$

където матрици $\widetilde{\mathbf{U}}_1$ и $\widetilde{\mathbf{U}}_2$ са от представянето $\widetilde{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{U}}_1 \\ \widetilde{\mathbf{U}}_2 \end{bmatrix}$,

за $\widetilde{\mathbf{U}}_1 \in \mathbb{C}^{m\times p}$ и $\widetilde{\mathbf{U}}_2 \in \mathbb{C}^{q\times p}$.

След оценяване на $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ моделът може да се използва за реконструкция на състоянията при зададена последователност от

управляващи входове. При начално състояние $\mathbf{x_1}$ последователното прилагане на модела дава:

(29) $\mathbf{x_{k+1}} = \mathbf{\Phi \Lambda^{k+1} b} + \mathbf{\Phi} \sum_{\mathbf{s=0}}^{\mathbf{k}} \mathbf{\Lambda^{k-s} \Phi^{\dagger} \overline{B}\, u_s}$

за $k = 1, \dots, n-1$, където $\mathbf{b} = \mathbf{\Phi^{\dagger} x_1}$ и $\mathbf{\overline{B}} = \mathbf{Y \widetilde{V} \widetilde{\Sigma}^{-1} \widetilde{U}_2^*}$.

Алтернативен DMDc метод [16-17]. Развитието на DMDc включва алтернативни и подобрени алгоритми, насочени към по-ефективно оценяване на операторите и към обработка на данни с различна рангова структура. Независимо от конкретната реализация, основното предимство на DMDc е, че осигурява модел, който отчита както вътрешната динамика на системата, така и въздействието на входовете. Това е особено важно при идентификация и прогнозиране на управляеми динамични процеси.

Един алтернативен подход на описания дотук DMDc метод е представен в [16]. Използвайки това, че най-доброто приближение на линейния оператор G се определя по следния начин:

$$\mathbf{G} = \mathbf{Y \Omega^{\dagger}},$$

където $\mathbf{\Omega^{\dagger}}$е псевдообратната матрица на $\mathbf{\Omega}$, то матрица $\Omega^{\dagger}$ може да се представи по следния начин:

$$\mathbf{\Omega^{\dagger}} = [\mathbf{\Omega_1}\ \ \mathbf{\Omega_2}],$$

където $\mathbf{\Omega_1} \in C^{(n-1)\times m}$ и $\mathbf{\Omega_2} \in C^{(n-1)\times q}$.

Прилага се редуцирано сингулярно разлагане на $\mathbf{\Omega_1}$, вместо на Y :

(30) $\mathbf{\Omega_1} \approx \breve{\mathbf{U}} \breve{\mathbf{\Sigma}} \breve{\mathbf{V}}^*$,

където $\breve{\mathbf{U}} \in C^{n\times r}$, $\breve{\mathbf{\Sigma}} \in C^{r\times r}$ и $\breve{\mathbf{V}} \in C^{m\times r}$, а r е редът на ранг редукцията.

Използвайки матрична трансформация $\breve{\mathbf{V}}$, за апроксимациите от нисък ред на матриците A и B получаваме:

(31) $\widetilde{\mathbf{A}} = \breve{\mathbf{V}}^* \mathbf{Y} \breve{\mathbf{U}} \breve{\mathbf{\Sigma}}$ и $\widetilde{\mathbf{B}} = \breve{\mathbf{V}}^* \mathrm{Y} \mathbf{\Omega_2}$,

където $\widetilde{\mathbf{A}} \in \mathbb{R}^{r\times r}$ и $\widetilde{\mathbf{B}} \in \mathbb{R}^{r\times q}$.

За матрицата на DMD модовете се получава:

(32) $\mathbf{\Phi} = \mathbf{Y}\breve{\mathbf{U}}\breve{\mathbf{\Sigma}}\mathbf{W}$,

където матрицата $\mathbf{W}$ се определя от спектралното разлагане на $\tilde{\mathbf{A}}$.

5 Заключение

DMD предлага практически подход за извличане на динамични модове от последователни измервания и има естествена теоретична връзка с оператора на Купман. Основната схема се основава на апроксимация на прехода между съседни моментни снимки и спектрален анализ на редуциран оператор. Развитието на метода включва по-ефективни алгоритми за точен DMD, онлайн актуализации за поток от данни, модели от по-висок ред и включване на управляващи въздействия чрез DMDc. Изборът на конкретна модификация зависи от структурата на данните и целта на анализа. Онлайн DMD е подходящ при последователно постъпване на измервания; HODMD е полезен, когато е необходимо да се включи времева памет; DMDc е приложим при системи с известни управляващи входове.

ЛИТЕРАТУРА:

[1] Koopman, Bernard O. Hamiltonian Systems and Transformation in Hilbert Space. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America 17, no. 5: 315–318, 1931.

[2] Schmid, P. J. Dynamic mode decomposition of experimental data. In: 8th International Symposium on Particle Image Velocimetry, Melbourne, Australia, 2009.

[3] Schmid, P. J. Dynamic mode decomposition of numerical and experimental data. Journal of Fluid Mechanics, 656, 2010, pp. 5–28.

[4] Schmid, P. J., Sesterhenn, J. Dynamic mode decomposition of numerical and experimental data. 61st Annual Meeting of the APS Division of Fluid Dynamics, American Physical Society, 2008.

[5] Nedzhibov, G. Dynamic Mode Decomposition: A New Approach for Computing the DMD Modes and Eigenvalues. Ann. Acad. Rom. Sci. Ser. Math. Appl., 14(1–2), 2022, pp. 5–16.

[6] Nedzhibov, G. On Alternative Algorithms for Computing Dynamic Mode Decomposition. Computation, 10(12), 2022, article 210.

[7] Nedzhibov, G. Dynamic Mode Decomposition: An Alternative Algorithm for Full-Rank Datasets. Applicationes Mathematicae, 50, 2023, pp.55–65.

[8] Hemati, M. S., Williams, M. O., Rowley, C. W., Deem, E. A., Cattafesta, L. N. De-biasing the dynamic mode decomposition for applied Koopman spectral analysis of noisy datasets. Theoretical and Computational Fluid Dynamics, 31, 2017, pp. 349–368.

[9] Zhang, H. et al. Online dynamic mode decomposition for streaming data analysis. [Библиографските данни следва да се уточнят според използваното издание.]

[10] Nedzhibov, G. Online Dynamic Mode Decomposition: An Alternative Approach for Low Rank Datasets. Ann. Acad. Rom. Sci. Ser. Math. Appl., 15(1–2), 2023, pp. 229–249.

[11] Nedzhibov, G. Extended Online DMD and Weighted Modifications for Streaming Data Analysis. Computation, 11(6), 2023.

[12] Le Clainche, S., Vega, J. M. Higher Order Dynamic Mode Decomposition. SIAM Journal on Applied Dynamical Systems, 16(2), 2017.

[13] Nedzhibov, G. On Higher Order Dynamic Mode Decomposition. Ann. Acad. Rom. Sci. Ser. Math. Appl., 16(2), 2024.

[14] Nedzhibov, G. A Variant of Second Order Dynamic Mode Decomposition. AIP Conference Proceedings, 3182(1), 2025, article 090002.

[15] Proctor, J. L., Brunton, S. L., Kutz, J. N. Dynamic Mode Decomposition with Control. SIAM Journal on Applied Dynamical Systems, 15(1), 2016, pp. 142–161.

[16] Nedzhibov, G. An Improved Approach for Implementing Dynamic Mode Decomposition with Control. Computation, 11(10), 2023, article 201.

[17] Nedzhibov, G. An Alternative Framework for Dynamic Mode Decomposition with Control. AppliedMath, 5(2), 2026, article 60.

Гюрхан Неджибов
ORCID ID: https://orcid.org/0000-0002-0474-1987
Месторабота: ШУ „Еп. Константин Преславски“
e-mail: g.nedzhibov@shu.bg