REDUCED HANKEL OPERATORS AND BOURGAIN ALGEBRAS

MIROSLAV K. HRISTOV

ABSTRACT: *For a Blaschke product $\boldsymbol{\psi}$, a known theorem shows that the Bourgain algebra $\left(\boldsymbol{\psi H^\infty}(\mathbb{T}), \boldsymbol{L^\infty}(\mathbb{T})\right)_{\boldsymbol{b}}$ coincides with the Sarason algebra $\boldsymbol{H^\infty}(\mathbb{T}) + \boldsymbol{C}(\mathbb{T})$. In this paper we present an operator-theoretic equivalent of this result: we define a Hankel operator $\boldsymbol{H_\varphi^\psi}$, reduced on the shift-invariant subspace $\boldsymbol{\psi H^2} \subset \boldsymbol{H^2}$, and prove that for a finite Blaschke product $\boldsymbol{\psi}$, the compactness of $\boldsymbol{H_\varphi^\psi}$ is exactly equivalent to $\boldsymbol{\varphi}$ belonging to $(\boldsymbol{\psi H^\infty}, \boldsymbol{L^\infty})_{\boldsymbol{b}}$, together with a quantitative formula for its essential norm. We also consider the case of infinite Blaschke products, where the phenomenon breaks down, illustrated with a concrete example.*

KEYWORDS: *Hankel operator, Bourgain algebra, Blaschke product, compact operator, Hardy space*

DOI: https://doi.org/10.46687/MUMQ6580

РЕДУЦИРАНИ ОПЕРАТОРИ НА ХЕНКЕЛ И АЛГЕБРИ НА БУРГЕН[*]

МИРОСЛАВ К. ХРИСТОВ

АБСТРАКТ: *За произведение на Блашке $\boldsymbol{\psi}$, известна теорема показва, че алгебрата на Бурген $\left(\boldsymbol{\psi H^\infty}(\mathbb{T}), \boldsymbol{L^\infty}(\mathbb{T})\right)_{\boldsymbol{b}}$ съвпада с алгебрата на Сарасон $\boldsymbol{H^\infty}(\mathbb{T}) + \boldsymbol{C}(\mathbb{T})$. В настоящата статия представяме операторно-теоретичен еквивалент на този резултат: дефинираме оператор на Хенкел $\boldsymbol{H_\varphi^\psi}$, редуциран върху инвариантното подпространство $\boldsymbol{\psi H^2} \subset \boldsymbol{H^2}$, и доказваме, че за крайно произведение на Блашке $\boldsymbol{\psi}$ компактността на $\boldsymbol{H_\varphi^\psi}$ е точно еквивалентна на това, че $\boldsymbol{\varphi}$ принадлежи на $(\boldsymbol{\psi H^\infty}, \boldsymbol{L^\infty})_{\boldsymbol{b}}$, с придружаваща количествена формула за съществената му норма. Разглеждаме и случая на безкрайни произведения на Блашке, при който явлението се разпада, илюстрирано с конкретен пример.*

КЛЮЧОВИ ДУМИ: *оператор на Хенкел, алгебра на Бурген, произведение на Блашке, компактен оператор, пространство на Харди*

1. Въведение

Нека Y е комутативна банахова алгебра и X е линейно подпространство на Y. *Алгебра на Бурген* $X_b = (X, Y)_b$ на X спрямо Y е множеството на всички $f \in Y$, за които: ако $f_n \to 0$ слабо в X, то $\mathrm{dist}_Y(ff_n, X) \to 0$. Понятието е въведено от Cima и Timoney [1] по идеи на Bourgain [2].

Нека $\mathbb{T}$ е единичната окръжност, $\mathbb{D}$ — отвореният единичен кръг, $H^2 = H^2(\mathbb{T})$ и $H^\infty = H^\infty(\mathbb{T})$ са пространствата на Харди, $H^2_- = L^2(\mathbb{T}) \ominus H^2$ и P_- е ортогоналната

[*] Настоящата статия е частично финансирана по проект РД-08-114/2026 г. на Шуменски университет.

проекция на $L^2(\mathbb{T})$ върху H^2_- (виж §2). Операторът на Хенкел със символ $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$ е $H_\varphi f = P_-(\varphi f)$, $f \in H^2$. Hartman [3] доказва, че

$$H_\varphi \text{ е компактен} \Leftrightarrow \varphi \in H^\infty + C(\mathbb{T}). \qquad (1)$$

В [4] Cima, Janson и Yale показват, че $(H^\infty, L^\infty)_b = H^\infty + C(\mathbb{T})$ (друго доказателство дават Gorkin, Izuchi и Mortini [5]) и че

$$H_\varphi \text{ е компактен} \Leftrightarrow \varphi \in (H^\infty, L^\infty)_b. \qquad (2)$$

Станков и Христов [6] изследват алгебрата $\psi H^\infty + C$ за крайно произведение на Блашке ψ и доказват, че $(\psi H^\infty + C, L^\infty)_b = H^\infty + C(\mathbb{T})$. Алгебри на Бурген на идеали, породени от вътрешни функции, са разглеждани и в [9].

В настоящата работа търсим оператор, чиято компактност е равносилна на принадлежността към алгебрата

$$(\psi H^\infty, L^\infty)_b = H^\infty + C(\mathbb{T}). \qquad (3)$$

Такъв е *редуцираният оператор на Хенкел* $H^\psi_\varphi = H_\varphi|_{\psi H^2}$. В §3 доказваме, че за крайно ψ той е компактен точно когато $\varphi \in (\psi H^\infty, L^\infty)_b$ (Теорема 3.4); равенството (3) получаваме там за произволна вътрешна функция ψ (Лема 3.1). В §4 е показано, че при безкрайно ψ компактността на H^ψ_φ вече не съвпада с принадлежност към тази алгебра.

2. Предварителни сведения

Нека $H^p = H^p(\mathbb{D})$, $0 < p < \infty$, е пространството на холоморфните в $\mathbb{D}$ функции F с $\| F \|_{H^p} = \sup_{0\le r<1}(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|F\left(re^{i\theta}\right)\right|^p\, d\theta)^{1/p} < \infty$. По теоремата на Fatou граничните стойности $f\left(e^{i\theta}\right) = \lim_{r\to 1^-} F\left(re^{i\theta}\right)$ съществуват п.в. и определят изометрично влагане на $H^2(\mathbb{D})$ в $L^2(\mathbb{T})$. Отъждествяваме H^2 с образа на това влагане:

$$H^2 = \{f \in L^2(\mathbb{T}):\ \hat{f}(n) = 0,\ n < 0\}, \qquad \hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(e^{i\theta}\right)e^{-in\theta}\, d\theta.$$

Нека $H^2_- = L^2(\mathbb{T}) \ominus H^2$ и $P_+ f = \sum_{n\ge 0}\hat{f}(n)\zeta^n$, $P_- f = \sum_{n<0}\hat{f}(n)\zeta^n$. Тогава P_+ и P_- са ортогоналните проекции върху H^2 и H^2_-, като $P_+ + P_- = I$ и $P_+P_- = P_-P_+ = 0$. Матрицата на H_φ спрямо стандартните базиси е постоянна по антидиагоналите.

Нека $(z_n) \subset \mathbb{D}$ и $\sum_n (1 - |z_n|) < \infty$. Функцията $\psi(z) = \prod_n \frac{|z_n|}{z_n}\cdot\frac{z_n - z}{1-\overline{z_n}z}$ е произведение на Блашке с нули (z_n); очевидно $|\psi| = 1$ п.в. върху $\mathbb{T}$, т.е. ψ е вътрешна функция. Тъй като $|\psi| = 1$, операторът $M_\psi: H^2 \to \psi H^2$, $M_\psi f = \psi f$, е унитарен. Със $\|\cdot\|_{\mathrm{ess}}$ означаваме съществената норма, т.е. разстоянието до компактните оператори.

Известно е, че $H^\infty + C(\mathbb{T})$ е затворена алгебра [7] и че крайните произведения на Блашке са единствените вътрешни функции, обратими в $H^\infty + C(\mathbb{T})$ [8].

3. Редуцирани оператори на Хенкел

Лема 3.1. Ако ψ е вътрешна функция, то $(\psi H^\infty, L^\infty)_b = (H^\infty, L^\infty)_b = H^\infty + C(\mathbb{T})$.

Доказателство. Изображението $g \mapsto \psi g$ е линеен изометричен изоморфизъм на H^∞ върху ψH^∞; затова $\psi g_n \to 0$ слабо в ψH^∞ точно когато $g_n \to 0$ слабо в H^∞. Тъй като $|\psi| = 1$ п.в., за $f \in L^\infty$ и $g \in H^\infty$ получаваме

$$\operatorname{dist}_{L^\infty}(f\psi g, \psi H^\infty) = \inf_{h \in H^\infty} \| \psi(fg - h) \|_\infty = \operatorname{dist}_{L^\infty}(fg, H^\infty).$$

Следователно $f \in (\psi H^\infty, L^\infty)_b \Leftrightarrow f \in (H^\infty, L^\infty)_b$, а второто равенство е от [4, 5]. С това лемата е доказана. ▫

Забележете, че за алгебрата $\psi H^\infty + C$ и крайно ψ аналогично равенство е доказано в [6], а за ψH^∞ в [9] е получено само включването $(\psi H^\infty, L^\infty)_b \supset C$.

Нека ψ е произведение на Блашке и $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$. Определяме

$$H_\varphi^\psi : \psi H^2 \to H^2_-, \qquad H_\varphi^\psi(\psi h) = P_-(\varphi \psi h), \quad h \in H^2,$$

т.е. $H_\varphi^\psi = H_\varphi|_{\psi H^2}$ (за $\psi = 1$ получаваме H_φ). Ще ни трябват още две леми.

Лема 3.2. За всяко произведение на Блашке ψ и $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$: H_φ^ψ е компактен $\Leftrightarrow$ $\varphi \in \overline{\psi}\left(H^\infty + C(\mathbb{T})\right)$, и

$$\| H_\varphi^\psi \|_{\text{ess}} = \operatorname{dist}_{L^\infty}\left(\varphi, \overline{\psi}\left(H^\infty + C(\mathbb{T})\right)\right).$$

Доказателство. Нека $\widetilde{H}_\varphi^\psi = H_\varphi^\psi \circ M_\psi : H^2 \to H^2_-$. Тъй като M_ψ е унитарен, H_φ^ψ е компактен точно когато $\widetilde{H}_\varphi^\psi$ е компактен, и $\| H_\varphi^\psi \|_{\text{ess}} = \| \widetilde{H}_\varphi^\psi \|_{\text{ess}}$. Но $\widetilde{H}_\varphi^\psi(h) = P_-(\varphi\psi h) = H_{\varphi\psi}(h)$, т.е. $\widetilde{H}_\varphi^\psi = H_{\varphi\psi}$. По теоремата на Hartman (1), $H_{\varphi\psi}$ е компактен $\Leftrightarrow$ $\varphi\psi \in H^\infty + C$, а по теоремата на Adamyan–Arov–Kreĭn [10] $\| H_{\varphi\psi} \|_{\text{ess}} = \operatorname{dist}_{L^\infty}(\varphi\psi, H^\infty + C)$. Умножението с $\overline{\psi}$ е изометрия на $L^\infty(\mathbb{T})$ и $\overline{\psi}\psi = 1$ п.в.; следователно $\varphi\psi \in H^\infty + C \Leftrightarrow \varphi \in \overline{\psi}(H^\infty + C)$, а разстоянията съвпадат. С това лемата е доказана. ▫

Лема 3.3. Ако ψ е крайно произведение на Блашке, то

$$\overline{\psi}\left(H^\infty + C(\mathbb{T})\right) = H^\infty + C(\mathbb{T}).$$

Доказателство. Нулите на ψ лежат строго в $\mathbb{D}$, а ψ е рационална функция без нули върху $\mathbb{T}$; следователно $\overline{\psi} = 1/\psi \in C^\infty(\mathbb{T}) \subset C(\mathbb{T})$. Тъй като $H^\infty + C(\mathbb{T})$ е затворена алгебра [7], получаваме $\overline{\psi}(H^\infty + C) \subseteq H^\infty + C$. Обратно, $\psi \in H^\infty + C$; ако $g \in H^\infty + C$, то $k := \psi g \in H^\infty + C$ и $g = \overline{\psi}k \in \overline{\psi}(H^\infty + C)$. С това лемата е доказана. ▫

Теорема 3.4. Нека ψ е крайно произведение на Блашке. Тогава

$$H_\varphi^\psi \text{ е компактен} \Leftrightarrow \varphi \in (\psi H^\infty, L^\infty)_b, \qquad \| H_\varphi^\psi \|_{\text{ess}} = \text{dist}_{L^\infty}(\varphi, (\psi H^\infty, L^\infty)_b).$$

Доказателство. Съгласно Лема 3.2, Лема 3.3 и Лема 3.1, H_φ^ψ е компактен $\Leftrightarrow \varphi \in \overline{\psi}(H^\infty + C) \Leftrightarrow \varphi \in H^\infty + C \Leftrightarrow \varphi \in (\psi H^\infty, L^\infty)_b$. Формулата за $\| H_\varphi^\psi \|_{\text{ess}}$ следва от втората част на Лема 3.2. С това теоремата е доказана. ▫

Пример 3.5. Нека $\psi(z) = z$. Тогава $\overline{\psi} = z^{-1} \in C(\mathbb{T})$ и Теорема 3.4 дава: H_φ^ψ е компактен $\Leftrightarrow \varphi \in H^\infty + C(\mathbb{T})$, както и за H_φ върху цялото H^2.

4. Безкрайни произведения на Блашке

Лема 3.1 и Лема 3.2 остават в сила за произволно ψ, но Лема 3.3 не е.

Твърдение 4.1. Ако ψ е безкрайно произведение на Блашке, то $\overline{\psi} \notin H^\infty + C(\mathbb{T})$.

Доказателство. Тъй като $\overline{\psi} = \psi^{-1}$ на $\mathbb{T}$, твърдението следва от факта от §2 [8]. Ще дадем и пряко доказателство. Нека (z_n) са нулите на ψ; от условието на Блашке $|z_n| \to 1$. За $w \in \mathbb{D}$ нека $k_w(z) = \sqrt{1-|w|^2}\,(1-\bar{w}z)^{-1}$ е нормираното възпроизвеждащо ядро на H^2, т.е. $\| k_w \|_2 = 1$ и $\langle f, k_w \rangle = \sqrt{1-|w|^2}\, f(w)$. Нека $k_n = k_{z_n}$. Тогава $k_n \to 0$ слабо в H^2: за полином f имаме $|\langle f, k_n \rangle| \le \| f \|_\infty \sqrt{1-|z_n|^2} \to 0$, полиномите са гъсти и $\| k_n \|_2 = 1$. За $f \in H^2$ е $\langle P_+(\overline{\psi}k_w), f \rangle = \langle k_w, \psi f \rangle = \overline{\psi(w)}\,\langle k_w, f \rangle$, т.е. $P_+(\overline{\psi}k_w) = \overline{\psi(w)}k_w$. При $w = z_n$ получаваме $P_+(\overline{\psi}k_n) = 0$, откъдето $H_{\overline{\psi}}k_n = P_-(\overline{\psi}k_n) = \overline{\psi}k_n$ и $\| H_{\overline{\psi}}k_n \|_2 = \| k_n \|_2 = 1$. Ако $\overline{\psi} \in H^\infty + C$, то $H_{\overline{\psi}}$ е компактен по (1) и $\| H_{\overline{\psi}}k_n \|_2 \to 0$, което е противоречие. С това твърдението е доказано. ▫

Доказателството използва само че нулите на ψ са безбройно много.

Пример 4.2. Нека ψ е произведението на Блашке с нули $z_n = 1 - \frac{1}{n^2}$, $n \ge 1$. Условието на Блашке е изпълнено, тъй като $\sum_n \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} < \infty$. По Твърдение 4.1, $\overline{\psi} \notin H^\infty + C(\mathbb{T})$. Тъй като $1 \in H^\infty + C$, имаме $\overline{\psi} \in \overline{\psi}(H^\infty + C)$; следователно, по Лема 3.1, $\overline{\psi}(H^\infty + C) \neq H^\infty + C = (\psi H^\infty, L^\infty)_b$.

Така при безкрайно ψ компактността на H_{φ}^{ψ} не съвпада с принадлежност към алгебрата (3). Остават два открити въпроса: (1) как $\overline{\psi}(H^{\infty}+C)$ се съотнася с граничното (нетангенциално) поведение на функциите от $(\psi H^{\infty}, L^{\infty})_b$; (2) съществува ли аналог на Теорема 3.4 върху $\mathbb{D}$ за алгебрите $\psi H^{\infty}(\mathbb{D})$, $\psi A(\mathbb{D})$ и редуциран оператор върху пространството на Бергман $A^2(\mathbb{D})$.

[1] Cima, J., Timoney, R., The Dunford–Pettis property for certain planar uniform algebras. Michigan Math. J. **34** (1987), 99–104.

[2] Bourgain, J., The Dunford–Pettis property for the ball algebras, the polydisc algebras and Sobolev spaces. Studia Math. **77** (1984), 245–253.

[3] Hartman, P., On completely continuous Hankel matrices. Proc. Amer. Math. Soc. **9** (1958), 862–866.

[4] Cima, J., Janson, S., Yale, K., Completely continuous Hankel operators on H^{∞} and Bourgain algebras. Proc. Amer. Math. Soc. **105** (1989), 121–125.

[5] Gorkin, P., Izuchi, K., Mortini, R., Bourgain algebras of Douglas algebras. Canad. J. Math. **44** (1992), No. 4, 797–804.

[6] Stankov, D., Hristov, M., Bourgain algebras of the algebra $\psi H^{\infty}+C$ on the unit circle and on the spectrum $M(H^{\infty})$. C. R. Acad. Bulg. Sci. **66** (2013), No. 9, 1223–1230.

[7] Sarason, D., Algebras of functions on the unit circle. Bull. Amer. Math. Soc. **79** (1973), 286–299.

[8] Garnett, J., Bounded Analytic Functions. Graduate Texts in Mathematics 236, Springer, New York, 2007.

[9] Hristov, M., Bourgain algebras of ideals in H^{∞} generated by inner functions. Filomat **35** (2021), No. 15, 5131–5135.

[10] Peller, V. V., Hankel Operators and Their Applications. Springer Monographs in Mathematics, Springer, New York, 2003.

Мирослав К. Христов
Шуменски университет „Епископ Константин Преславски“
E-mail: miroslav.hristov@shu.bg