FROM THEORY TO PRACTICE: LAGRANGE INTERPOLATION POLYNOMIAL WITH APPLICATION EXAMPLES

TONYA MATEVA

Abstract: *This article examines one of the fundamental methods in numerical analysis — the Lagrange interpolation polynomial, with emphasis on its practical application in various fields of science and technology. The aim of the study is not only to demonstrate the technical side of the method, but also to stimulate a deeper understanding of the relationship between theory and practice, especially in the context of training students and young specialists.*

Keywords: *Lagrange interpolation, numerical methods, basis polynomials, polynomial degree, piecewise interpolation.*

DOI: https://doi.org/10.46687/HFCQ1906

ОТ ТЕОРИЯ КЪМ ПРАКТИКА: ИНТЕРПОЛАЦИОНЕН ПОЛИНОМ НА ЛАГРАНЖ С ПРИЛОЖНИ ПРИМЕРИ

ТОНЯ МАТЕВА

Абстракт: *Настоящата статия разглежда един от фундаменталните методи в числения анализ — интерполационния полином на Лагранж, като акцентът е поставен върху неговото практическо приложение в различни области на науката и техниката. Целта на изследването е не само да се демонстрира техническата страна на метода, но и да се стимулира по-дълбоко разбиране за връзката между теорията и практиката, особено в контекста на подготовката на студенти и млади специалисти.*

1. Теоретична част

Интерполацията е широко използван подход за апроксимация на функции и за прогнозиране на стойности при ограничени емпирични данни. В теоретичната част на статията е представен формалният апарат на интерполационния полином на Лагранж, заедно с неговите свойства и ограничения. В практическата ѝ част е разгледан реален инженерен пример, чрез който се илюстрират ефективността и приложимостта на метода. Този пример може да бъде надграден с останалите теми от конспекта по дисциплината „Числени методи и математическо оптимиране“, изучавана в специалност „Информатика и информационни технологии“ в Колеж – Добрич, като по този начин се превърне в цялостен проект, обхващащ материала от курса.

Нека разгледаме следната задача: по дадени стойности на функцията f в $n + 1$ точки x_i, $i = 0, 1, \dots, n$, да се намери алгебричен полином P от n-та степен, който да има еднакви стойности с функцията f в точките x_i, i = 0, 1, …, n, т.е.

(1) $$P(x_i) = f(x_i),\ i = 0, 1, \dots, n.$$

Това е класическа интерполационна задача. Точките x_i се наричат интерполационни възли. В общия случай, независимо дали точките са равноотдалечени или не, за решаването на тази задача се използва интерполационната формула на Лагранж: [1], [2]

(2) $$L_n(f; x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \frac{w_n(x)}{(x-x_i).w_n'(x_i)}$$

където

(3) $$w_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$$

Можем, за удобство, да напишем формулата и така:

(4) $$L_n(f; x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\Phi_i(x)$$

(5) $$\Phi_i(x) = \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}$$

2. От теория към практика

Ще разгледаме практичен пример от ежедневието за по-ясно осъзнаване същността и приложението на тази формула.

Пример 1: В метеорологична станция в гр. Добрич са измерени температурите в следните часове на деня. Да се изчисли температурата в 10:30 часа, като се използва интерполационният полином на Лагранж.

Таблица 1

Данни за температурата (Пример 1)

i	0	1	2	3
Час (x_i)	6:00	9:00	12:00	15:00
Температура °C (y_i)	18°	21°	26°	28°

Решение:

1. Преобразуваме 6:00, 9:00, 12:00, 15:00 в десетична стойност. Това са възлите x_i:

(6) $$x_0 = 6, \quad x_1 = 9, \quad x_2 = 12, \quad x_3 = 15$$

(7) $$y_0 = 18, \quad y_1 = 21, \quad y_2 = 26, \quad y_3 = 28$$

2. Прилагаме формулата на Лагранжовия интерполационен полином при n = 3:

(8) $$L_3(f; x) = y_0.\Phi_0(x) + y_1.\Phi_1(x) + y_2.\Phi_2(x) + y_3.\Phi_3(x),$$

където

(9) $$\Phi_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}$$

(10) $$\Phi_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}$$

(11) $$\Phi_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}$$

(12) $$\Phi_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

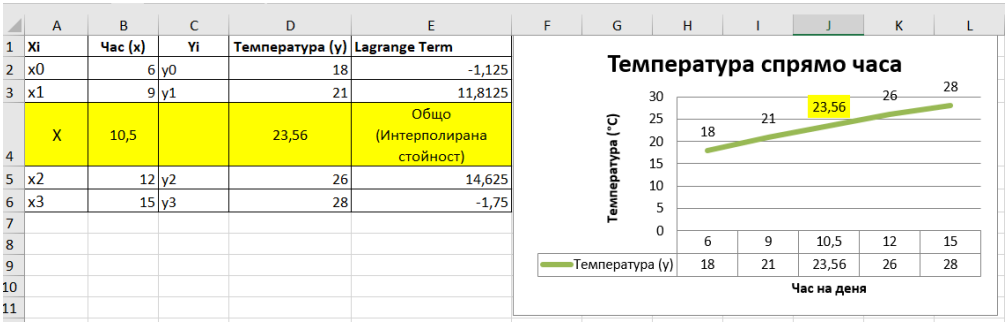
3. Изчисляваме стойността на полинома за x = 10.5 с дадените точки: (6:00, 18°), (9:00, 21°), (12:00, 26°), (15:00, 28°).

4. Изчислената стойност чрез полинома на Лагранж е: 23.56 °C.

Изчисленията могат да бъдат извършени ръчно или с помощта на програма Excel.

В електронната таблица на фигура 1 в колона „Lagrange Term“ са представени стойностите на отделните събираеми на интерполационния полином на Лагранж, изчислени за търсената стойност ($x = 10.5$). Всяко събираемо се получава като произведение на съответната функционална стойност (y_i) и стойността на базисния полином ($\Phi_i(x)$в разглежданата точка. Сумата на тези събираеми дава търсената интерполационна стойност, която в конкретния пример е приблизително 23.56.

Няма вградена формула за интерполационния полином на Лагранж, но изписването на формулите не е толкова трудоемко и ни спестява доста пресмятания и вероятност за грешки. Визуализацията с диаграма ни дава още по-ясна представа за решението на задачата. Графиката на Фигура 1 е начупена линия през измерените точки. За да се види самият полином, той трябва да се пресметне в достатъчно гъста мрежа от точки (например 20).



	A	B	C	D	E
1	Xi	Час (x)	Yi	Температура (y)	Lagrange Term
2	x0	6	y0	18	-1,125
3	x1	9	y1	21	11,8125
4	X	10,5		23,56	Общо (Интерполирана стойност)
5	x2	12	y2	26	14,625
6	x3	15	y3	28	-1,75
7					
8					
9					
10					
11					

Фигура 1. Пресмятане на интерполационната стойност и визуализация на резултата в Excel

След като разгледахме теоретичните основи на интерполационния полином на Лагранж и ги илюстрирахме с конкретен пример, ще пристъпим към по-задълбочен анализ върху нов пример, като изследваме как се променя ефективността на метода при използване на по-малко или повече възли.

Пример 2: При изпитване на автомобил са измерени стойности на средния разход на гориво при различни постоянни скорости:

Таблица 2

Данни за разхода на гориво (Пример 2)

i	0	1	2	3	4
V_i — скорост (km/h) — (x_i)	60	80	100	120	140
R_i — разход (l/100 km) — (y_i)	5.1	5.6	6.4	7.8	9.9

Тук възниква въпросът — доколко резултатът зависи от броя на използваните възли. Ще построим последователност от полиноми на Лагранж с нарастваща степен, като всеки следващ включва допълнителен съседен възел около изследваната точка V = 90 km/h, и ще проследим как се променя оценката. [3]

Полином от първа степен (права линия през два възела)

Използваме двата възела, непосредствено обкръжаващи V = 90 km/h — $V_1 = 80$ ($R_1 = 5.6$) и $V_2 = 100$ ($R_2 = 6.4$):

(13)

$$L_1(f;x) = R_1.\Phi_1(x) + \mathrm{R}_2.\Phi_2(x)$$

(14)

$$L_1(f;x) = 5.6 \cdot \frac{V-100}{80-100} + 6.4 \cdot \frac{V-80}{100-80}$$

Пресмятаме стойностите на базисните полиноми точно в интересуващата ни точка V = 90:

(15) $$\Phi_1(90) = \frac{90-100}{80-100} = \frac{1}{2} = 0.5$$

(16) $$\Phi_2(90) = \frac{90-80}{100-80} = \frac{1}{2} = 0.5$$

(проверка: $\Phi_1(90) + \Phi_2(90) = 1$, както изисква свойството на базисните полиноми [1]). Окончателно:

(17) $$L_1(90) = 5.6 \cdot 0.5 + 6.4 \cdot 0.5 = 6.0000$$

Полином от втора степен (парабола през три възела)

Добавяме трети съседен възел $V_0 = 60$ ($R_0 = 5.1$), заедно с вече използваните $V_1 = 80$ ($R_1 = 5.6$) и $V_2 = 100$ ($R_2 = 6.4$):

(18)

$$L_2(f;x) = R_0.\Phi_0(x) + R_1.\Phi_1(x) + \mathrm{R}_2.\Phi_2(x)$$

(19) $$\Phi_0(V) = \frac{V-80}{60-80} \cdot \frac{V-100}{60-100}$$

(20) $$\Phi_1(V) = \frac{V-60}{80-60} \cdot \frac{V-100}{80-100}$$

(21) $$\Phi_2(V) = \frac{V-60}{100-60} \cdot \frac{V-80}{100-80}$$

Пресмятаме стойностите им в точката V = 90:

(22) $$\Phi_0(90) = (-0.5) \cdot (0.25) = -0.125$$

(23) $$\Phi_1(90) = (1.5) \cdot (0.5) = 0.75$$

(24) $$\Phi_2(90) = (0.75) \cdot (0.5) = 0.375$$

(проверка: $\Phi_0(90) + \Phi_1(90) + \Phi_2(90)$=-0.125+0.75+0.375=1). Окончателно:

(25) $$L_2(90) = 5.1 \cdot (-0.125) + 5.6 \cdot 0.75 + 6.4 \cdot 0.375 = 5.9625$$

Полином от трета степен (кубична крива през 4 възела)

Добавяме четвърти възел: $V_3 = 120$ ($R_3 = 7.8$). По аналогичен начин пресмятаме:

(26) $L_3(90) = 5.1 \cdot (-0.0625) + 5.6 \cdot 0.5625 + 6.4 \cdot 0.5625 + 7.8 \cdot (-0.0625) = 5.9438$

И за всички пет възела по същия начин получаваме:

(27)$L_4(90) = 5.1 \cdot (-0.0391) + 5.6 \cdot 0.4688 + 6.4 \cdot 0.7031 + 7.8 \cdot (-0.1563) + 9.9 \cdot 0.0234 = 5.9391$

Таблица 3

Обобщение на резултатите за V = 90 km/h (по степени)

Степен	Възли (брой точки)	L(90), l/100 km	Δ спрямо предходната степен
1 (права линия)	80, 100 (2 точки)	6.0000	—
2 (парабола)	60, 80, 100 (3 точки)	5.9625	−0.0375
3 (кубична)	60, 80, 100, 120 (4 точки)	5.9438	−0.0187

Степен	Възли (брой точки)	L(90), l/100 km	Δ спрямо предходната степен
4 (пълна, всички възли)	60, 80, 100, 120, 140 (5 точки)	5.9391	−0.0047

Наблюдението е показателно: с всеки следващ, по-точен модел, оценката се изменя все по-малко — поправките бързо намаляват при всяка следваща степен (−0.0375 → −0.0187 → −0.0047). Това е стабилизиране на оценката: допълнителните възли добавят все по-малка нова информация, защото функцията вече е добре описана от по-нискостепенния полином в тази област. Аналогична таблица за V = 110 km/h показва подобна, макар и не строго монотонна картина:

Таблица 4

Обобщение на резултатите за V = 110 km/h (по степени)

Степен	Възли (брой точки)	L(110), l/100 km	Δ спрямо предходната степен
1	100, 120 (2 точки)	7.1000	—
2	100, 120, 140 (3 точки)	7.0125	−0.0875
3	80, 100, 120, 140 (4 точки)	7.0187	+0.0062
4 (пълна)	60, 80, 100, 120, 140 (5 точки)	7.0141	−0.0047

Какви изводи можем да направим: повече възли не винаги означава монотонно подобрение на всяка стъпка (вижте смяната на знака при преминаване от степен 2 към степен 3 в Таблица 4), но общата тенденция на намаляващи по големина поправки е ясен практически критерий кога да се спре — когато добавянето на нов възел променя резултата по-малко от изискваната точност, по-нататъшното усложняване на модела вече не си заслужава.

Втори важен практически въпрос е дали да построим един-единствен полином през всички налични точки (глобална интерполация), или диапазонът да се раздели на по-малки участъци, във всеки от които да приложим отделна, по-нискостепенна формула на Лагранж (локална, „парчева“ интерполация). Сравняваме глобалния полином $L_4(V)$ от Пример 2 с два локални варианта:

- парчево-линейна интерполация — във всеки интервал $[V_i, V_{i+1}]$ се построява права през двете му крайни точки (степен 1, локално);
- парчево-квадратична интерполация — за всяка точка V се избира най-близката тройка съседни възли и се строи локална парабола (степен 2, локално).

Таблица 5

Сравнение на глобална срещу парчева интерполация

v (km/h)	Парчево-линейна	Парчево-квадратична	Глобален полином (ст. 4)	|Глоб. − лин.|	|Глоб. − квадр.|
70	5.3500	5.3125	5.3391	0.0109	0.0266
90	6.0000	5.9625	5.9391	0.0609	0.0234
110	7.1000	7.0250	7.0141	0.0859	0.0109
130	8.8500	8.7625	8.7641	0.0859	0.0016

Изводът е ясен и типичен за числените методи: парчево-линейната интерполация е най-проста, но и най-неточна (отклонения до 0.086 l/100 km) — тя напълно игнорира кривината

на функцията във всеки участък. Преминаването към парчево-квадратична интерполация рязко подобрява точността (отклонения до 0.027 l/100 km) при съвсем скромно увеличение на изчислителната сложност. По-нататъшното преминаване към глобален полином от четвърта степен не води до съществено подобрение спрямо парчево-квадратичната интерполация в разгледания пример. При интерполация с глобални полиноми от висока степен обаче съществува риск от възникване на значителни осцилации между интерполационните възли, особено в близост до краищата на интервала. Това явление е известно като феномен на Рунге при равноотдалечени възли и показва, че увеличаването на броя на възлите не гарантира подобряване на точността на интерполацията [6]. Поради тази причина при решаването на практически задачи често се предпочита използването на парчева интерполация с полиноми от ниска степен, включително сплайн интерполация, която позволява по-добър контрол върху поведението на интерполиращата функция [4], [5], [6].

3. Заключение

В настоящата статия е разгледан интерполационният полином на Лагранж като метод за приближено определяне на функционални стойности при наличие на ограничен набор от известни данни. Представени са теоретичните основи на метода и са илюстрирани възможностите за практическото му приложение чрез примери от метеорологията и автомобилната индустрия. Изчисленията в среда Excel демонстрират как математическият апарат на интерполацията може да бъде приложен за решаване на конкретни задачи и за визуализиране на получените резултати.

Основен резултат от изследването е сравнителният анализ на интерполационни полиноми с различна степен при оценяване на разхода на гориво при зададена скорост. Получените резултати показват, че добавянето на интерполационни възли води до промяна в изчислените стойности, но тази промяна не е задължително монотонна. Съпоставянето на глобалната интерполация с парчево-линейната и парчево-квадратичната интерполация показва, че изборът на подход следва да се съобразява с необходимата точност, сложността на изчисленията и поведението на интерполиращата функция. Например парчево-линейната интерполация отклонява до около 0.086 l/100 km от глобалния полином, а парчево-квадратичната до около 0.027 l/100 km. По този начин се подчертава значението на критичния анализ на числените резултати, а не само на формалното прилагане на интерполационната формула.

Практическата стойност на разгледаните примери се изразява и във възможността те да бъдат използвани в обучението по дисциплината „Числени методи и математическо оптимиране“. Чрез решаването на задачи с реалистичен приложен контекст се създават условия за свързване на теоретичните знания с практиката, за развитие на умения за числен анализ и за използване на специализиран софтуер при решаване на математически задачи.

Като естествено продължение на изследването се предвижда сравнителен анализ на полиномиалната и сплайн интерполацията върху един и същ набор от данни. Особен интерес представлява изследването на точността и поведението на интерполиращите функции в целия разглеждан интервал, както и оценката на предимствата и ограниченията на двата подхода при различен брой интерполационни възли. Подобно изследване би позволило да се формулират по-обосновани препоръки за избор на интерполационен метод при решаване на практически задачи.

ЛИТЕРАТУРА:

[1] Хасанов, В. Ръководство по числени методи с Matlab. Университетско издателство „Епископ Константин Преславски“, Шумен (2019).

[2] Бъртън, Д. Въведение в числения анализ. Класика и Стил, София (2010).

[3] Burden, R. L., Faires, J. D. Numerical Analysis (9th ed.). Brooks/Cole, Boston (2011).

[4] Atkinson, K. E. An Introduction to Numerical Analysis (2nd ed.). John Wiley & Sons, New York (1989).

[5] Stoer, J., Bulirsch, R. Introduction to Numerical Analysis (3rd ed.). Springer, New York (2013).

[6] Trefethen, L. N. Approximation Theory and Approximation Practice, Extended Edition. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, DOI: 10.1137/1.9781611975949.(2020).

Тоня Матева:
Месторабота: Колеж – Добрич, ШУ „Епископ К. Преславски“
ORCID ID: 0009-0005-4178-2007
E-mail: t.mateva@shu.bg