Annual of Konstantin Preslavsky University of Shumen
Faculty of Mathematics and Informatics
vol. XXVII C, 2026, pp. 137 – 148, https://doi.org/10.46687/UHLL2886

SOLVING PARAMETRIC CUBIC EQUATIONS USING MATHEMATICAL ANALYSIS

IRINA I. APOSTOLOVA

ABSTRACT: *This paper examines parametric cubic equations whose solutions involve the concepts of functions, derivatives of functions, and local extrema. The theorems presented can be applied to solving a wider range of problems. The aim of the paper is to demonstrate the connection between previously acquired mathematical knowledge, to draw attention to parametric equations, and to highlight their use as a means of developing logical thinking.*

KEYWORDS: *parametric cubic equations, functions, derivatives of functions, local extrema, mathematics*

2010 Math. Subject Classification: *97H30, 97D80, 97K99*

РЕШАВАНЕ НА ПАРАМЕТРИЧНИ УРАВНЕНИЯ ОТ ТРЕТА СТЕПЕН С АПАРАТА НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ АНАЛИЗ *

ИРИНА И. АПОСТОЛОВА

1 Въведение

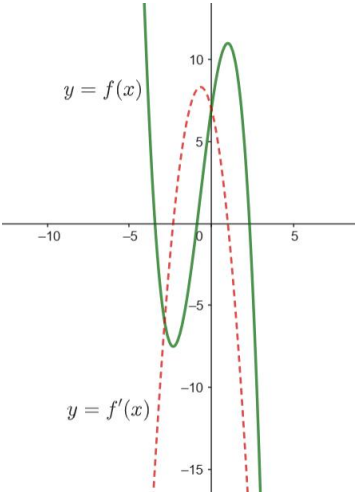
На кубичната функция, нейната графика и разположението на корените на уравнението от трета степен върху числовата ос не се отделя специално внимание в програмите за общообразователна подготовка в училищния курс по математика. Осмелилите се да изучават математика като профилиращ предмет във втори гимназиален етап имат възможност да се запознаят с различни

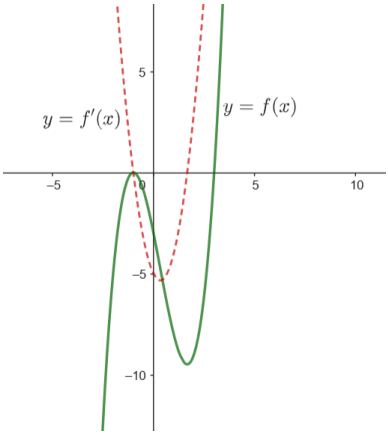
Статията е частично финансирана по проект № РД-08-117/05.02.2026 г. на ШУ "Епископ Константин Преславски"

инструменти за решаване на уравнения от по-висока степен - схема на Хорнер, метод на неопределените коефициенти. Разпространено е и използването на производните на функцията на една променлива за проверка на разположението на корените на дадено уравнение върху числовата ос.

2 Теоретични основи

Основавайки се на твърдението, че всеки полином от нечетна степен има поне един реален корен и разглеждайки графиката на кубичната функция, се вижда, че броят на реалните корени на уравнение от трета степен може да бъде определен и чрез приложение на диференциалното смятане на функция на една променлива (по-конкретно – производна на функция, локални екстремуми, монотонност), които се изучават от учениците в часовете по профилирана подготовка по математика във втори гимназиален етап. Ще разгледаме възможностите за полинома $\boldsymbol{f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d}$ $\boldsymbol{(a \neq 0)}$ с дефиниционно множество $\mathbb{R}$.





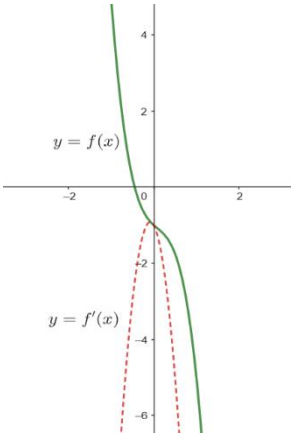
Фигура 1 **Фигура 2**

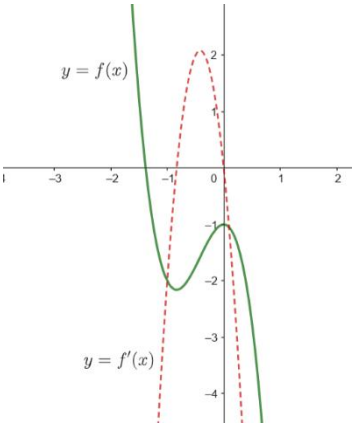
- Уравнението $\mathbf{f(x) = 0}$ има три различни реални корена, ако функцията $\mathbf{f(x)}$ има два различни локални екстремума и стойностите на функцията в точките на локален екстремум са с различни знаци (т.е. произведението им е отрицателно) (Фигура 1).

- Уравнението $f(x) = 0$ има два реални корена, от които единият е двоен, ако функцията $f(x)$ има два различни локални екстремума и стойността на функцията $f(x)$ в една от точките на локален екстремум е равна на нула. Ще отбележим, че в двойния корен функцията има локален екстремум (Фигура 2).

- Уравнението $\mathbf{f(x) = 0}$ има един реален корен, ако функцията $\mathbf{f(x)}$ няма локални екстремуми (в този случай $\mathbf{f(x)}$ е растяща в $\mathbb{R}$ или намаляваща в $\mathbb{R}$) (Фигура 3) или ако $\mathbf{f(x)}$ има два различни локални екстремума, които имат еднакви знаци (т.е. произведението им е положително) (Фигура 4).

-





Фигура 3 **Фигура 4**

Посочените три възможности могат да бъдат обосновани строго. Функцията $f(x)$ е непрекъсната в $\mathbb{R}$, а границите $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ и $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ са безкрайни и с противоположни знаци (определени от знака на старшия коефициент a). Следователно по теоремата на Болцано–Коши за междинните стойности уравнението $f(x)=0$ има поне един реален корен.

Теорема (Болцано-Коши): Ако функцията $h(x)$ е непрекъсната в [a,b] и $h(a).h(b)<0$, то $\exists\ \xi \in$ (a,b), така че $h(\xi)=0$.

Теоремата на Болцано-Коши геометрично означава, че графиката на функцията $f(x)$ пресича оста Ox поне в една точка.

Ако $f(x)$ има два локални екстремума в точките $x_1<x_2$, то тя е строго монотонна във всеки от интервалите $(-\infty;x_1]$, $[x_1;x_2]$ и $[x_2;+\infty)$ и във всеки от тях има най-много един корен. Корен във вътрешността на средния интервал съществува тогава и само тогава, когато $f(x_1)$ и $f(x_2)$ са с различни знаци. В този случай знаците на екстремалните стойности осигуряват корен и във всеки от двата крайни интервала. Когато $f(x_1)$ и $f(x_2)$ са с еднакви знаци, корен има само в един от крайните интервали. Така броят на реалните корени се определя изцяло от знака на произведението $f(x_1)\cdot f(x_2)$.

3 Алгоритъм за определяне на броя на реалните корени

Използвайки апарата на математическия анализ (изучаван в часовете по профилирана подготовка по математика във втори гимназиален етап) се оформя алгоритъм, чрез който лесно може да бъде определен броя на корените на уравнение от трета степен.

Разглеждаме полинома $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d, a\neq 0$. (При $a=0$ получаваме квадратен тричлен $f(x)=bx^2+cx+d$, за който е ясно как се определят корените. Първата производна на функцията е $f'(x)=3ax^2+2bx+c$. Очевидно е, че $f'(x)$ е квадратна функция с дискриминанта $D_{f'}=b^2-3ac$.

При $D_{f'} > 0$ $f(x)$ има два локални екстремума и съществуват f_{min} и f_{max}.

- Ако $f_{min}.\ f_{max} < 0$, $f(x) = 0$ има три различни реални корена.
- Ако $f_{min}.\ f_{max} = 0$, $f(x) = 0$ има два различни реални корена, от които единият е двоен.
- Ако $f_{min}.\ f_{max} > 0$, $f(x) = 0$ има само един реален корен.

При $D_{f'} \leq 0$ $f(x)$ е строго монотонно растяща/намаляваща. $f(x) = 0$ има един реален корен (който е троен при $D_{f'} = 0$ ($b^2 = 3ac$) и $f\left(-\frac{b}{3a}\right) = 0$).

Обобщено, алгоритъмът може да бъде формулиран в следните стъпки:

Стъпка 1. Ако старшият коефициент зависи от параметъра, отделно се разглежда случаят, в който той е равен на нула (тогава уравнението не е от трета степен).

Стъпка 2. Намира се $f'(x)$ и се определя знакът на $D_{f'}$.

Стъпка 3. При $D_{f'} \leq 0$ уравнението $f(x) = 0$ има точно един реален корен (при $D_{f'} = 0$ и $f\left(-\frac{b}{3a}\right) = 0$ той е троен).

Стъпка 4. При $D_{f'} > 0$ се намират точките на локален екстремум x_1, x_2 и стойността на $f(x_1)$, $f(x_2)$.

Стъпка 5. Относно параметъра се решават неравенствата $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$ и $f(x_1) \cdot f(x_2) > 0$ и уравнението $f(x_1).f(x_2) = 0$, като се отчитат ограниченията от предходните стъпки.

Стъпка 6. Резултатите от всички разгледани случаи се обединяват.

Ще приложим предложения алгоритъм върху няколко примера на уравнения от трета степен с параметър, изпълнявайки следното общо условие:

Задача: За кои стойности на параметъра k уравнението има:
а) един реален корен;

б) три различни реални корена;
в) два различни реални корена, от които единият е двоен.

Пример 1: $x^3 - 3x + k = 0$

Решение:

Нека $(x) = x^3 - 3x + k$. От $f'(x) = 3x^2 - 3$ и $D_{f'} = 36 > 0$ се вижда, че функцията има два локални екстремума.

От $3x^2 - 3 = 0$ намираме, че тези екстремуми са в $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$, а техните стойности са съответно $f(-1) = k + 2$ и $f(1) = k - 2$.

Неравенството $f(-1).f(1) < 0$ е изпълнено за $k \in (-2; 2)$, $f(-1).f(1) = 0$ при $k = -2$ и $k = 2$, а $f(-1).f(1) > 0$ за $k \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

След проверка на съответните равенства и неравенства от алгоритъма можем да направим извода, че за $\boldsymbol{k \in (-2; 2)}$ уравнението има три различни реални корена, за $\boldsymbol{k = -2}$ и $\boldsymbol{k = 2}$ уравнението има два корена, от които единият е двоен, а за $\boldsymbol{k \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)}$ уравнението има един реален корен.

Пример 2: $x^3 - kx + 1 = 0$

Решение:

За $f(x) = x^3 - kx + 1$ $f'(x) = 3x^2 - k$, а $D_{f'} = 0^2 - 4.3.(-k) = 12k$. Следвайки алгоритъма, разглеждаме две възможности за $D_{f'}$.

От $D_{f'} \leq 0$ получаваме, че при $k \leq 0$ уравнението има един реален корен.

Проверяваме различните случай за $D_{f'} > 0$, т.е. за $k > 0$.

При $k > 0$ уравнението $f'(x) = 3x^2 - k = 0$ има два различни реални корена $x_1 = \sqrt{\frac{k}{3}}$ и $x_2 = -\sqrt{\frac{k}{3}}$. Ако $f\left(\sqrt{\frac{k}{3}}\right) = -\frac{2k\sqrt{k}}{3\sqrt{3}} + 1$ и $f\left(-\sqrt{\frac{k}{3}}\right) = \frac{2k\sqrt{k}}{3\sqrt{3}} + 1$ намираме, че:

- $f\left(\sqrt{\frac{k}{3}}\right).f\left(-\sqrt{\frac{k}{3}}\right) < 0$ при $k > \frac{3\sqrt[3]{2}}{2}$ ($\frac{3\sqrt[3]{2}}{2} \approx 1{,}89$);
- $f\left(\sqrt{\frac{k}{3}}\right)f\left(-\sqrt{\frac{k}{3}}\right) = 0$ при $k = \frac{3\sqrt[3]{2}}{2}$;
- $f\left(\sqrt{\frac{k}{3}}\right).f\left(-\sqrt{\frac{k}{3}}\right) > 0$ за $k < \frac{3\sqrt[3]{2}}{2}$. Но $k > 0$, следователно неравенството $f\left(\sqrt{\frac{k}{3}}\right).f\left(-\sqrt{\frac{k}{3}}\right) > 0$ е изпълнено за $k \in (0; \frac{3\sqrt[3]{2}}{2})$.

Обобщавайки получените резултати достигаме до извода, че при $k < \frac{3\sqrt[3]{2}}{2}$ уравнението има един реален корен, за $k = \frac{3\sqrt[3]{2}}{2}$ - два реални корена, от които единият е двоен, а при $k > \frac{3\sqrt[3]{2}}{2}$ уравнението има три различни реални корена.

Пример 3: $x^3 + kx^2 + 1 = 0$

Решение:

От $f(x) = x^3 + kx^2 + 1$ получаваме $f'(x) = 3x^2 + 2kx$ и $D = 4k^2$.

Очевидно е, че $D_{f'} \leq 0$ за $k = 0$ и $D_{f'} > 0$ за всяко $k \neq 0$.

При $D_{f'} > 0$ $(k \neq 0)$ уравнението $f'(x) = 3x^2 + 2kx = 0$ има два различни реални корена $x_1 = 0$ и $x_2 = -\frac{2k}{3}$.

След намиране на $f(0) = 1$ и $f\left(-\frac{2k}{3}\right) = \frac{4k^3+27}{27}$ проверяваме възможностите:

- $f(0).f\left(-\frac{2k}{3}\right) < 0$ за $k < -\frac{3\sqrt[3]{2}}{2}$;
- $f(0).f\left(-\frac{2k}{3}\right) = 0$ при $k = -\frac{3\sqrt[3]{2}}{2}$;
- $f(0).f\left(-\frac{2k}{3}\right) > 0$ при $k > -\frac{3\sqrt[3]{2}}{2}$.

От полученото можем да обобщим, че за $\boldsymbol{k > -\frac{3\sqrt[3]{2}}{2}}$ уравнението има един реален корен, за $\boldsymbol{k = -\frac{3\sqrt[3]{2}}{2}}$ уравнението има два реални корена, от които единият е двоен корен, а при $\boldsymbol{k < -\frac{3\sqrt[3]{2}}{2}}$ уравнението има три различни реални корена.

Пример 4: $(k-2)x^3 - kx + 1 = 0$

Решение:

От условието се вижда, че първо трябва да обърнем внимание на старшия коефициент $(k-2)$.

- Ако $k-2=0$ (т.е. $k=2$) уравнението $-2x+1=0$ е линейно с корен $x=\frac{1}{2}$;
- Ако $k-2\neq 0$ (т. е. $k\neq 2$) уравнението е кубично и го решаваме по вече утвърдения алгоритъм.

За $f'(x) = 3(k-2)x^2 - k$ получаваме $D_{f'} = 12k(k-2)$.

При $D_{f'} \leq 0$ неравевнството $12k(k-2) \leq 0$ е изпълнено за $k \in [0;2]$, но условието е $k \neq 2$, следователно при $k \in [0;2)$ уравнението има един реален корен.

Решенията на неравенството $D_{f'} > 0$ са $k \in (-\infty;0) \cup (2;+\infty)$ и за тези стойности на параметъра корените на уравнението $f'(x) = 3(k-2)x^2 - k = 0$ са $x_1 = -\sqrt{\frac{k}{3(k-2)}}$ и $x_2 = \sqrt{\frac{k}{3(k-2)}}$. Намираме $f\left(-\sqrt{\frac{k}{3(k-2)}}\right) = 1 + \frac{2k}{3}\sqrt{\frac{k}{3(k-2)}}$ и $f\left(\sqrt{\frac{k}{3(k-2)}}\right) = 1 - \frac{2k}{3}\sqrt{\frac{k}{3(k-2)}}$.

От $f\left(-\sqrt{\frac{k}{3(k-2)}}\right).f\left(\sqrt{\frac{k}{3(k-2)}}\right) = 1 - \frac{4k^3}{27(k-2)} = 0$, с помощта на формулите на Кардано за намиране на корените на кубично

уравнение, получаваме $k_0 = -\frac{3^3}{2^4}\left(\sqrt[3]{1-\frac{\sqrt{3}}{4}}+\sqrt[3]{1+\frac{\sqrt{3}}{4}}\right) \approx -3{,}3.$ Тогава:

- $f\left(-\sqrt{\frac{k}{3(k-2)}}\right).f\left(\sqrt{\frac{k}{3(k-2)}}\right) < 0$ при $k \in (-\infty; k_0) \cup (2; +\infty)$;
- $f\left(-\sqrt{\frac{k}{3(k-2)}}\right).f\left(\sqrt{\frac{k}{3(k-2)}}\right) = 0$ при $k = k_0$;
- $f\left(-\sqrt{\frac{k}{3(k-2)}}\right).f\left(\sqrt{\frac{k}{3(k-2)}}\right) > 0$ е изпълнено за $k \in (k_0; 2)$, но в случая $k \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$, следователно за $k \in (k_0; 0)$ уравнението има само един реален корен.

Обобщавайки получените резултати можем да направим изводите, че:

1) При $k \in (k_0; 2]$ уравнението има един реален корен.

2) За $k = k_0$ - два реални корена, от които единият е двоен.

3) При $k \in (-\infty; k_0) \cup (2; +\infty)$ уравнението има три различни реални корена.

4 Методически бележки и алтернативен подход

Наред с разгледания алгоритъм, при голяма част от задачите от този тип може да се приложи и методът на отделяне на параметъра. Когато параметърът участва линейно в уравнението, той може да бъде изразен във вида $k = g(x)$. Тогава броят на реалните корени на изходното уравнение е равен на броя на пресечните точки на правата $y = k$ с графиката на функцията $y = g(x)$, а изследването се свежда до построяване на графиката на функция без параметър.

Така например уравнението от Пример 1 е равносилно на $k = 3x - x^3$. Функцията $g(x) = 3x - x^3$ има локален минимум $g(-1) = -2$ и локален максимум $g(1) = 2$. Поради това правата

$y = k$ пресича графиката ѝ в три точки при $-2 < k < 2$, допира се до нея при $k = \pm 2$ и я пресича в една точка при $|k| > 2$.

Аналогично, тъй като $x = 0$ не е корен на уравнението от Пример 2, то е равносилно на $k = x^2 + \frac{1}{x}$, $x \neq 0$. Функцията $h(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ е строго намаляваща в интервала $(-\infty; 0)$ и приема в него всички реални стойности. В интервала $(0; +\infty)$ тя има единствен локален минимум $h\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = \frac{3\sqrt[3]{2}}{2}$. Оттук отново следва, че уравнението има три различни реални корена при $k > \frac{3\sqrt[3]{2}}{2}$.

Методът на отделяне на параметъра е особено подходящ при използване на динамичен софтуер (например GeoGebra), в който параметърът се задава чрез плъзгач, а учениците наблюдават как се променя броят на пресечните точки. Съпоставянето на двата подхода (аналитичния, основан на знака на $f(x_1) \cdot f(x_2)$, и графичния) позволява на учениците сами да проверяват верността на получените резултати.

От методическа гледна точка следва да се обърне внимание на някои типични затруднения на учениците:

– пропускането на случая, в който старшият коефициент се анулира (вж. Пример 4);

– неразграничаването между броя на различните корени и броя на корените, отчетени с кратността им;

– пренебрегването на граничния случай $D_{f'} = 0$;

– некоректното обединяване на интервалите, получени в отделните случаи.

5 Заключение

Задачите с параметър са традиционно избягвани от учениците, но те са отлична възможност за проверка на степента на разбиране на математическите знания. Алгоритмичното им решаване и възможността решенията им да бъдат онагледени чрез

съответните графики (с помощта на динамичен софтуер или други съвременни дигитални ресурси) спомагат за лесното им усвояване.

Обобщените резултати от разгледаните примери са представени в Таблица 1.

Таблица 1. Брой на реалните корени в зависимост от стойностите на параметъра $\boldsymbol{k}$

Уравнение	**Един реален корен**	**Два корена, единият двоен**	**Три различни реални корена**
$x^3 - 3x + k = 0$	$\lvert k\rvert > 2$	$k = \pm 2$	$-2 < k < 2$
$x^3 - kx + 1 = 0$	$k < \frac{3\sqrt[3]{2}}{2}$	$k = \frac{3\sqrt[3]{2}}{2}$	$k > \frac{3\sqrt[3]{2}}{2}$
$x^3 + kx^2 + 1 = 0$	$k > -\frac{3\sqrt[3]{2}}{2}$	$k = -\frac{3\sqrt[3]{2}}{2}$	$k < -\frac{3\sqrt[3]{2}}{2}$
$(k-2)x^3 - kx + 1 = 0$	$k \in (k_0; 2]$	$k = k_0$	$k \in (-\infty; k_0) \cup (2; +\infty)$

Представеният подход показва как понятия от различни раздели на училищния курс по математика (квадратен тричлен и неговата дискриминанта, производна, монотонност, локални екстремуми и непрекъснатост) се обединяват при решаването на една задача. Алгоритъмът е приложим за всяко кубично уравнение с реални коефициенти. Идеята му (изследване на броя на корените чрез монотонността и екстремумите на съответната функция) може да бъде пренесена и към други класове уравнения.

Подобни въпроси са разгледани в статиите на Росен Николаев и Танка Милкова [1], Шойра Абадиева и Рискелди Тургунбаев [2].

Възможни насоки за по-нататъшна работа са изследването на знаците на корените, както и разглеждането на уравнения от четвърта степен и на трансцендентни уравнения с параметър.

ЛИТЕРАТУРА:

[1] Николаев, Р., Т. Милкова. Определяне броя на корените на един клас параметрични алгебрични уравнения от трета степен, сп. Математика и информатика, Volume 60, Number 4, стр. 370-376, 2017.

[2] Abdiyeva, Sh., R. Turgunbaev, Theorems on the number of roots Of a cubic equation and their location As a means of developing Students' visual thinking, Physical and mathematical education, Volume 38, Number 4, 7-13, 2023.

[3] Актуални учебни програми по математика.

[4] Актуални учебници по математика за ООП и ПП, одобрени от МОН към 2026.

Ирина Иванова Апостолова
ШУ „Ел. Константин Преславски“
e-mail: i.apostolova@shu.bg